3 次元単純整凸多面体の Ehrhart 多項式

須山 雄介 *

大阪市立大学大学院理学研究科，2016 年 2 月

1　トーリック多様体

複素 d 次元の**トーリック多様体**とは，$\mathbb{C}$ 上の正規代数多様体 X であって，**代数的トーラス** $(\mathbb{C}^{\times})^d$ を稠密な開集合として含み，$(\mathbb{C}^{\times})^d$ の自分自身への自然な作用を X 全体への作用に拡張するものをいう．

代数的トーラスの作用は明示しないことが多いが，トーリック多様体というと作用も込みで考えており，代数多様体としては同じものでも，作用が異なれば異なるトーリック多様体と考える．トーリック多様体は極めて特別な代数多様体である．代数的トーラス，アフィン空間，射影空間はトーリック多様体であるが，同じ次元のトーリック多様体はすべて双有理同値である．

トーリック多様体は，扇とよばれる組合せ論的な対象との間に 1 対 1 対応がある．これにより，トーリック多様体の代数多様体としての性質を，扇の言葉で記述することができる．

定義 1.1. $\mathbb{R}^d$ の**有理強凸多面錐**とは，$\mathbb{Z}^d$ の有限個のベクトルで張られる多面錐 $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}v_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}v_r$ で，$\mathbb{R}^d$ の 0 でないいかなる部分空間も含まないものをいう．

定義 1.2. $\mathbb{R}^d$ の**扇**とは，$\mathbb{R}^d$ の有理強凸多面錐からなる空でない有限集合 Δ であって，次を満たすものをいう．

1. $\sigma \in \Delta$ ならば，σ の各面もまた Δ に属する．
2. $\sigma, \tau \in \Delta$ ならば，$\sigma \cap \tau$ はそれぞれの面である．

定理 1.3 (トーリック幾何の基本定理)**.** 複素 d 次元のトーリック多様体の同型類と，$\mathbb{R}^d$ の扇は 1 対 1 に対応する．

ここでは扇 Δ からトーリック多様体 $X(\Delta)$ を構成する方法のみ説明する．まず，各有理強凸多面錐 $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ からアフィン代数多様体 U_σ を構成する．$\sigma^\vee = \{u \in \mathbb{R}^d \mid$ すべての $v \in \sigma$ に対し $\langle u, v\rangle \geq 0\}$ とおくと，$\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^d$ は和に関し可換モノイドになり，モノイド環 $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^d]$ は有限生成整域になる．したがって $\mathrm{Spec}\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^d]$ はアフィン代数多様体になるので，これを U_σ とおく．

一般の場合はこれらを貼り合わせる．τ が σ の面ならば，包含写像 $\tau \to \sigma$ から自然に定まる射 $U_\tau = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[\tau^\vee \cap \mathbb{Z}^d] \to \mathrm{Spec}\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^d] = U_\sigma$ は開埋め込みになる．これにより U_τ を U_σ の開部分集合と同一視し，U_σ たちを貼り合わせてできる代数多様体が求めるトーリック多様体 $X(\Delta)$ である．

定理 1.4. 扇とトーリック多様体の間には表 1 のような関係がある．

*d15san0w03@st.osaka-cu.ac.jp

扇 Δ	トーリック多様体 $X(\Delta)$
$\bigcup_{\sigma\in\Delta}\sigma=\mathbb{R}^d$	完備
各 $\sigma\in\Delta$ が $\mathbb{Z}^d$ の基底の一部で張られる	滑らか
各 $\sigma\in\Delta$ が $\mathbb{R}^d$ の基底の一部で張られる	$\mathbb{Q}$ 分解的

表 1: 扇とトーリック多様体の対応.

2　整凸多面体の Ehrhart 多項式

$P\subset\mathbb{R}^d$ を**整凸多面体**，すなわち頂点がすべて $\mathbb{Z}^d$ 上にある凸多面体とする．非負整数 l に対し $lP=\{lx\mid x\in P\}$ とおくと，lP の格子点の数 $|(lP)\cap\mathbb{Z}^d|$ は l に関する d 次多項式になり，これを P の **Ehrhart 多項式**とよぶ．$|(lP)\cap\mathbb{Z}^d|=c_dl^d+c_{d-1}l^{d-1}+\cdots+c_0$ とおくと，c_0,c_{d-1},c_d は以下のように P の言葉で記述できる．

P の余次元 1 の面を P の**ファセット**とよぶ．$F_1,\ldots,F_n$ を P のファセット全体とする．F_k を含む超平面上の格子点が定める立方体の体積を 1 と定めたときの F_k の体積を，F_k の**相対体積**とよび，$\mathrm{vol}(F_k)$ で表す．余次元が 1 でない面に対しても同様に相対体積を定義し，vol で表す．P 本体の相対体積 $\mathrm{vol}(P)$ は，通常の意味での P の体積に一致する．

定理 2.1. 次が成り立つ．

1. $c_0=1$.
2. $c_{d-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{vol}(F_k)$.
3. $c_d=\mathrm{vol}(P)$.

例 2.2. 整凸多角形の Ehrhart 多項式は，定理 2.1 で完全にわかる．図 1 の多角形は，面積が 9, 辺の相対体積の和が $4+1+2+1=8$ だから，Ehrhart 多項式は $9l^2+4l+1$ である．

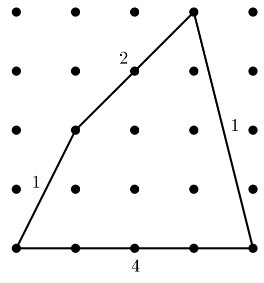

図 1: 整凸多角形.

一方，c_0,c_{d-1},c_d 以外の係数に対しては，特別な場合を除き P の言葉による記述は知られていない．

3　主結果

d 次元凸多面体が**単純**であるとは，各頂点でちょうど d 個のファセットが交わっていることをいう．$d=3$ の場合，一般的な公式が知られていないのは c_1 であるが，P が単純な場合は次のよう

に記述できる．

$F_1,\dots,F_n$ を P のファセット全体する．各 $1\le k\le n$ に対し，F_k に垂直で P の内部を向いている primitive なベクトル（成分の最大公約数が 1 のベクトル）を $v_k\in\mathbb{Z}^3$ とおく．

定義 3.1. P の各辺 $E=F_{k_1}\cap F_{k_2}$ に対し，$m(E),s(E)\in\mathbb{Q}$ を定義する．

1. $m(E)=|((\mathbb{R}v_{k_1}+\mathbb{R}v_{k_2})\cap\mathbb{Z}^3)/(\mathbb{Z}v_{k_1}+\mathbb{Z}v_{k_2})|$ と定める．

2. $(\mathbb{R}v_{k_1}+\mathbb{R}v_{k_2})\cap\mathbb{Z}^3$ の基底 e_1,e_2 で $v_{k_1}=e_1, v_{k_2}=pe_1+qe_2$ $(0\le p<q)$ とかけるものを 1 組とって，$s(E)=s(p,q)$ とおく．ただし $s(p,q)$ は **Dedekind 和**，すなわち

$$s(p,q)=\sum_{i=1}^{q}\left(\left(\frac{i}{q}\right)\right)\left(\left(\frac{pi}{q}\right)\right),\quad ((x))=\begin{cases} x-[x]-\frac{1}{2} & (x\notin\mathbb{Z})\\ 0 & (x\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

である．

注意 3.2. $q=m(E)$ である．p は基底のとり方によりたかだか 2 通りの値をとるが，$s(p,q)$ はともに同じ値をとるので，$s(E)$ は well-defined である．

定義 3.3. P の各ファセット F に対し，$C(F)\in\mathbb{Q}$ を定義する．まず，F のまわりの頂点やファセットを図 2 のように P_i,Q_i,F_{k_i} とおき，F に垂直で P の内部を向いている primitive なベクトルを $v\in\mathbb{Z}^3$ とおく．

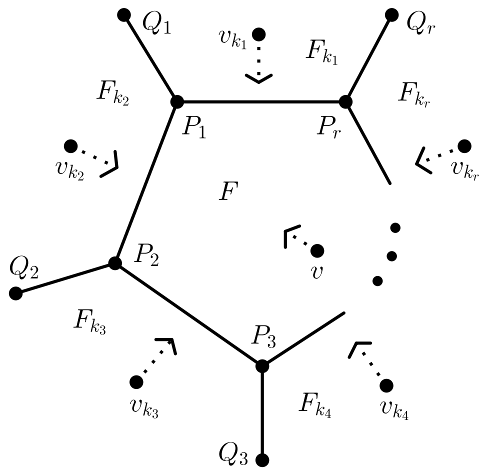

図 2: F のまわりの頂点やファセットを P_i,Q_i,F_{k_i} とおく．

以上の記号の下に，各 $1\le i\le r$ に対し，

$$\varepsilon_i=\det(v,v_{k_{i+1}},v_{k_i}),\quad a_i=\frac{\langle\overrightarrow{P_{i-1}Q_{i-1}},v_{k_{i+1}}\rangle}{\varepsilon_i\langle\overrightarrow{P_{i-1}Q_{i-1}},v\rangle},\quad b_i=\frac{\langle\overrightarrow{P_iP_{i+1}},v_{k_{i-1}}\rangle}{\varepsilon_{i-1}\langle\overrightarrow{P_iP_{i+1}},v_{k_i}\rangle}$$

とおき（$v_{k_0} = v_{k_r}, v_{k_{r+1}} = v_{k_1}$ などと約束する），

$$C(F) = -\sum_{2\le i<j\le r} a_i \begin{vmatrix} b_{i+1} & \varepsilon_{i+1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_{i+1}^{-1} & b_{i+2} & \varepsilon_{i+2}^{-1} & \ddots & \vdots \\ 0 & \varepsilon_{i+2}^{-1} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{j-2} & \varepsilon_{j-2}^{-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{j-2}^{-1} & b_{j-1} \end{vmatrix} \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \cdots \varepsilon_{j-1} \frac{\mathrm{vol}(P_{j-1}P_j)}{m(P_{j-1}P_j)}$$

とおく．ただし，0×0 行列の行列式は 1 であると約束する．

定理 3.4. $P \subset \mathbb{R}^3$ を 3 次元単純整凸多面体，$E_1, \ldots, E_m$ を P の辺全体，$F_1, \ldots, F_n$ を P のファセット全体とすると，

$$c_1 = \sum_{j=1}^{m} \left(s(E_j) + \frac{1}{4} \right) \mathrm{vol}(E_j) + \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{n} C(F_k)$$

が成り立つ．

定理 2.1 と合わせると，P の Ehrhart 多項式のすべての係数が P の言葉で記述できる．

4 証明

一般に，d 次元整凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ から $\mathbb{R}^d$ の扇 Δ_P が構成できる．P の各面 F に対し，$\sigma_F = \{v \in \mathbb{R}^d \mid \langle u' - u, v \rangle \ge 0 \quad \forall u' \in P, \forall u \in F\}$ とおくと，$\Delta_P = \{\sigma_F \mid F$ は P の面 $\}$ は $\mathbb{R}^d$ の扇になる．したがって複素 d 次元のトーリック多様体 $X(\Delta_P)$ が定まる．$\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma = \mathbb{R}^d$ だから定理 1.4 より $X(\Delta_P)$ は完備である．

我々は次の事実を用いる．詳しくは [F], [P] などを参照されたい．

1. 各 $0 \le i \le d$ に対し，$X(\Delta_P)$ の **Todd** 類 $\mathrm{Td}_i(X(\Delta_P)) \in A_i(X(\Delta_P))_{\mathbb{Q}}$ が定まる．
2. P の i 次元の各面 F に対し，$X(\Delta_P)$ の複素 i 次元の閉部分多様体 $V(F)$ が定まる．
3. $\mathrm{Td}_i(X(\Delta_P)) = \sum_F r_F [V(F)]$ と表せたとすると，$c_i = \sum_F r_F \mathrm{vol}(F)$ が成り立つ．

$P \subset \mathbb{R}^3$ を 3 次元単純整凸多面体とする．各 $\sigma \in \Delta_P$ は $\mathbb{R}^3$ の基底の一部で張られるから，定理 1.4 より $X(\Delta_P)$ は $\mathbb{Q}$ 分解的である．$\mathbb{Q}$ 分解的なトーリック多様体は，$\mathbb{Q}$ 係数の Chow 環の構造がわかっており，特に次が成り立つ．

$$\sum_{k=1}^{n} \langle u, v_k \rangle [V(F_k)] = 0 \quad \forall u \in (\mathbb{Q}^3)^*, \tag{1}$$

$$[V(F_{k_1})][V(F_{k_2})] = \begin{cases} \frac{1}{m(E)} [V(E)] & (F_{k_1} \cap F_{k_2} = E) \\ 0 & (F_{k_1} \cap F_{k_2} = \emptyset). \end{cases} \tag{2}$$

Pommershiem は d 次元単純整凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ に対し，$\mathrm{Td}_{d-2}(X(\Delta_P))$ を $[V(F)]$ たちの線形結合で表している．$d = 3$ の場合は次のようになる．

定理 4.1 (Pommersheim [P])**.** P が 3 次元単純整凸多面体ならば，

$$\mathrm{Td}_1(X(\Delta_P)) = \sum_{j=1}^{m} \left(s(E_j) + \frac{1}{4} \right) [V(E_j)] + \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{n} [V(F_k)]^2.$$

したがって，定義 3.3 の記号を用いると，定理 3.4 を示すには，P の各ファセット F に対し

$$[V(F)]^2 = -\sum_{2\le i<j\le r} a_i \begin{vmatrix} b_{i+1} & \varepsilon_{i+1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_{i+1}^{-1} & b_{i+2} & \varepsilon_{i+2}^{-1} & \ddots & \vdots \\ 0 & \varepsilon_{i+2}^{-1} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{j-2} & \varepsilon_{j-2}^{-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{j-2}^{-1} & b_{j-1} \end{vmatrix} \frac{\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\cdots\varepsilon_{j-1}}{m(P_{j-1}P_j)}[V(P_{j-1}P_j)]$$

を示せばよい．$u \in (\mathbb{Q}^3)^*$ を $\langle u, v\rangle = 1, \langle u, v_{k_1}\rangle = 0, \langle u, v_{k_2}\rangle = 0$ で定めると，(1), (2) より

$$[V(F)]^2 = -[V(F)]\sum_{j=1}^{r}\langle u, v_{k_j}\rangle[V(F_{k_j})] = -\sum_{j=3}^{r}\langle u, v_{k_j}\rangle\frac{1}{m(P_{j-1}P_j)}[V(P_{j-1}P_j)].$$

したがって，$3 \le j \le r$ に対し

$$\langle u, v_{k_j}\rangle = \sum_{i=2}^{j-1} a_i \begin{vmatrix} b_{i+1} & \varepsilon_{i+1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_{i+1}^{-1} & b_{i+2} & \varepsilon_{i+2}^{-1} & \ddots & \vdots \\ 0 & \varepsilon_{i+2}^{-1} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{j-2} & \varepsilon_{j-2}^{-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{j-2}^{-1} & b_{j-1} \end{vmatrix} \varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\cdots\varepsilon_{j-1}$$

を示せばよいが，これは j に関する帰納法で示せる．a_i, b_i の定義より $\varepsilon_{i-1}^{-1}v_{k_{i-1}} + \varepsilon_i^{-1}v_{k_{i+1}} = a_i v + b_i v_{k_i}$ が成り立つので，$v_{k_{j+1}}$ を $v_{k_j}, v_{k_{j-1}}$ で表し，帰納法の仮定を使うと，等式の成立が確かめられる．これで証明が終わる．

注意 4.2. 1. $C(F)$ は F のまわりのどのファセットを F_{k_1} とおいても同じ値になる．

2. 同じ方針で 4 次元以上の整凸多面体の Ehrhart 多項式を求めることは困難である．Ehrhart 多項式の係数はファセットの形状にも依存するが，3 次元多面体のファセットはすべて多角形であるのに対し，4 次元以上では様々な形状のファセットが現れるためである．

謝辞

この度は，第 13 回城崎新人セミナーに参加させていただきありがとうございました．異なる分野の参加者と議論をすることができ，たいへん充実した時間を過ごすことができました．このような場を設けてくださった運営委員の方々，そして参加者の皆様，特に主結果に関し有益なコメントをくださった土谷昭善氏，戸次鵬人氏に深く感謝申し上げます．本研究は，科研費 (課題番号:15J01000) の助成を受けたものです．

参考文献

[F] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Ann. of Math. Studies, vol. 131, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1993.

[P] J. E. Pommersheim, *Toric varieties, lattice points and Dedekind sums*, Math. Ann., 295 (1993), 1–24.