正標数の代数多様体における non-nef locus について

佐藤 謙太*

東京大学大学院数理科学研究科 M2，2016 年 2 月

1 Introduction

k を体，X を k 上の正規射影代数多様体とし，L を可逆層 (つまり，階数 1 の局所自由層) とする．この時，L がどのくらい nef でないかを特徴づける量が二通り定義される．一つ目は，restricted base locus $\mathbf{B}_-(L)$ であり，もう一つが non-nef locus $\mathrm{NNef}(L)$ である．これら二つは定義が大きく異なる (詳しい定義は定義 2.8 と定義 3.1 を参照) が，それらは一致すると予想されており，実際いくつかの良い状況では一致することが示されていた．本稿の主定理は，以下の通りである．

定理 1.1 ([S])**.** k が正標数の完全体，X が k 上の正規射影代数多様体であって，高々強 F-正則という mild な特異点しか持たない時，任意の L について $\mathbf{B}_-(L) = \mathrm{NNef}(L)$.

2 章でネフ性及び $\mathrm{NNef}(L)$ を定義する．3 章で $\mathbf{B}_-(L)$ の定義を与え，主定理について改めて説明する．4 章では主定理の証明の鍵となる判定イデアルについて説明していく．5 章では，主定理の証明を行う．

注意 1.2. 本稿では，他分野の方にとっての馴染みやすさを考慮して,「因子」を使うことを避けて，全て「可逆層」で代用している．その為，一般的でない定義を採用している箇所がいくつかあるのでご注意下さい．

2 可逆層のネフ性

k を体，X を k 上の正規射影代数多様体とする．可逆層のなす集合 $\mathrm{Pic}(X)$ は，テンソル積に関してアーベル群になる (従って，以下可逆層同士のテンソル積を $+$ により表すことにする)．$\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(X) := \mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の元を $\mathbb{Q}$-可逆層と呼ぶことにする．

定義 2.1. L を $\mathbb{Q}$-可逆層とする．

1. L が**非常に豊富**(very ample) とは，ある閉埋め込み $X \subseteq \mathbb{P}^N_k$ があって，$\mathbb{P}^N$ の可逆層 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ の X への引きもどしが L に一致することである．
2. L が**豊富**(ample) とは，ある自然数 n があって，nL が非常に豊富になることである．
3. L が**ネフ**(nef) とは，任意の豊富な $\mathbb{Q}$-可逆層 A について $L + A$ が豊富になることである．

*ktsato@ms.u-tokyo.ac.jp

ネフな可逆層は非常に性質がよく，与えられた可逆層がいつネフになるか？ということは非常に重要な問題である．この方向について，Goodman による次の命題が知られている．

命題 2.2 ([G]). L を 可逆層とする．この時，L がネフであることと，任意の閉点 $x \in X$ について　$\mathrm{ord}_x(||L||) = 0$ であることが同値.

以下，$\mathrm{ord}_x(||L||)$ の定義を説明する．

定義 2.3. $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$ をイデアル層，x を X の点とする．この時，$\mathfrak{a}$ の x での**重複度**が,

$$\mathrm{ord}_x(\mathfrak{a}) := \sup\{r \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{a}_x \subseteq \mathfrak{m}_x^r\}$$

で定まる．

定義 2.4. M を可逆層とした時，M の**基点イデアル**(base ideal) $\mathfrak{b}(|M|) \subseteq \mathcal{O}_X$ が，$\mathfrak{b}(|M|) := \mathrm{Im}(\mathrm{H}^0(X, M) \otimes M^{-1} \to \mathcal{O}_X)$ により定まる．

注意 2.5. このイデアルは，M がどのくらい大域切断で生成されるかどうかを反映しており，M が点 $x \in X$ において大域切断で生成されることと,$\mathfrak{b}(|M|)_x = \mathcal{O}_{X,x}$ が同値.

定義 2.6. M を可逆層，x を X の点とする．

1. M が有効 (つまり $\mathrm{H}^0(X, M) \neq 0$) とする．この時，$\mathrm{ord}_x(|M|) := \mathrm{ord}_x(\mathfrak{b}(|M|))$ と定義する．
2. L を (巨大な) $\mathbb{Q}$-可逆層とする．この時，$\mathrm{ord}_x(||L||) := \inf_n \mathrm{ord}_x(|nL|)/n$. ただし，$n$ は，nL が有効な可逆層となる全ての n を走るとする．

注意 2.7. 巨大とは，有効な $\mathbb{Q}$-可逆層と，豊富な $\mathbb{Q}$-可逆層の和でかけるようなものである．巨大でないと議論が少し複雑になるので，以下本稿では巨大な $\mathbb{Q}$-可逆層のみを扱うことにする．

Goodman はネフ性の交点数による特徴づけを用いて命題 2.2 を示した．この命題をもとに，non-nef locus が次のように定義される．

定義 2.8. L を $\mathbb{Q}$-可逆層とした時，L の *non-nef locus* $\mathrm{NNef}(L)$ が,

$$\mathrm{NNef}(L) := \{x \in X \mid \mathrm{ord}_x(||L||) > 0\} \subseteq X$$

で定義される．

3　基点集合

k を体，X を k 上の正規射影代数多様体とする．可逆層 L の**基点集合**(base locus) とは $\mathrm{Bs}(|L|) := \{x \in X \mid L$ は x において大域切断で生成されない $\} \subseteq X$ のことである．これは，基点イデアル $\mathfrak{b}(|L|)$ の定義する閉集合に他ならない．また，その漸近版として，**漸近的基点集合**(stable base locus) が，$\mathbf{B}(L) := \cap_n \mathrm{Bs}(|nL|)$ により定義される．

この量は，非常に重要であるが，扱いが難しい一面がある．例えば，L と L' が数値的同値でも，漸近的基点集合は一致するとは限らないことなどが知られている．その為少し修正して，より扱いやすい locus を定義する．

定義 3.1. 豊富な可逆層 A を固定する．この時，L の *restricted base locus* を，$\mathbf{B}_-(D) := \cup_{0<t\in\mathbb{Q}} \mathbf{B}(D+tA) \subseteq X$ で定義する．

この locus は性質がよく，たとえば次のようなことが知られている．

命題 3.2. L を $\mathbb{Q}$-可逆層とする．この時，L がネフであることと，$\mathbf{B}_{-}(L)=\emptyset$ が同値.

この命題と，命題 2.2 を見比べて，次が予想された．

予想 3.3. $\mathbb{Q}$-可逆層 L について，$\mathbf{B}_{-}(L)=\mathrm{NNef}(L)$.

注意 3.4. 上の予想について，$\supseteq$ の包含が常に成り立っていることは初等的な議論から従う．逆向きの包含が本質的であるが，こちら向きの包含はある種の ”base point free theorem” とみなせ，その意味からも重要な問題であるように思える．

この予想は，次の三つのケースで正しいことが知られている．

1. ([N]) $k=\mathbb{C}$ かつ X が非特異の時.
2. ([CdB]) $k=\mathbb{C}$ かつ X が高々klt 特異点しか持たない時.
3. ([M]) k が正標数の完全体で，X が非特異の時.

本稿の主結果 (定理 1.1) は，[CdB] の正標数での類似となっている．

4 判定イデアル

k を標数 $p>0$ の完全体，X を k 上の正規多様体とする．まず，定理 1.1 の証明で大きな役割を担う，判定イデアルというイデアル層を定義する．定義には，フロベニウス射 $F:X\to X$ という正標数独自の手法を用いる．

定義 4.1. R を標数 p の環，e を自然数，$q=p^e$ とすると，$F^e(r)=r^q$ により環準同型 $F^e:R\to R$ が定まる．R-加群 M に対し，M とアーベル群として同型な集合 F^e_*M を

$$F^e_*M:=\{F^e_*m\mid m\in M\}$$

により定め，R の作用を，$r\cdot F^e_*m=F^e_*(r^qm)$ により定める．F^e_*M は R 加群になる．

例 4.2. $R=k[[x_1,x_2,\ldots,x_d]]$ を形式的べき級数環とする．$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_d)\in\mathbb{N}^d$ について，$x^\lambda:=x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_d^{\lambda_d}\in R$ と書くことにする．自然数 $e>0$ について，

$$I_e:=\left\{\lambda\in\mathbb{N}^d\mid\forall i,0\le\lambda_i\le p^e-1\right\}\subseteq\mathbb{N}^d$$

と定める．この時，$F^e_*R=\oplus_{\lambda\in I_e}R\cdot(F^e_*x^\lambda)$ である．

次に，$\mathrm{Hom}_R(F^e_*R,R)$ を考える．$\lambda\in I_e$ に対し，$\mathrm{pr}_\lambda:F^e_*R\to R\cdot(F^e_*x^\lambda)\simeq R$ を第 λ 成分への射影とすると，

$$\mathrm{Hom}_R(F^e_*R,R)=\oplus_{\lambda\in I_e}R\cdot\mathrm{pr}_\lambda=F^e_*R\cdot\mathrm{pr}_{\mu_e}$$

である (ただし，$\mu_e=(p^e-1,p^e-1,\ldots,p^e-1)\in I_e$).

この例は，$\mathrm{Hom}_R(F^e_*R,R)$ が非常に良い性質を持っていることを示している．実際，判定イデアルの定義 (定義 4.4) は，この $\mathrm{Hom}_R(F^e_*R,R)$ を用いてなされている．

少し脇道にそれるが，上の例で $\mathrm{Hom}_R(F^e_*R,R)$ が簡単になったことは，グロタンディークの双対理論と関係がある．

例 4.3. d 次元非特異多様体 X について，階数 d の局所自由層 $\Omega_{X/k}$ の d 回ウェッジをとることで標準層と呼ばれる可逆層 ω_X が定まる．X が非特異でない時は，特異点を抜いたところの標準層をプッシュすることで，X の標準層 ω_X が定まる．

グロタンディークの双対理論によると，$\mathscr{H}om_X(F^e_*\omega_X, \omega_X)$ は $F^e_*\mathcal{O}_X$ 加群として階数 1 の局所自由層となる．特に局所的には，$F^e_*\mathcal{O}_X$ と同型であり，その生成元がトレース射 $\mathrm{Tr}^e_F : F^e_*\omega_X \to \omega_X$ である．例 4.2 における pr_{μ_e} は Tr^e_F に他ならない．

定義 4.4. $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$ を，(連接) イデアル層，t を正の実数とする．$X = \mathrm{Spec}\, R$ と仮定すると，R のイデアルの集合

$$\left\{0 \neq J \subseteq R \mid \forall e > 0, \forall \phi \in \mathrm{Hom}_R(F^e_*R, R) \text{ について} \phi(F^e_*(J \cdot \mathfrak{a}^{\lceil t(p^e-1)\rceil})) \subseteq J\right\}$$

は，唯一つ最小限をもつ．これを，$(X, \mathfrak{a}^t)$ に付随する**判定イデアル**と呼び， $\tau(X, \mathfrak{a}^t)$ とかく．

X がアフィンでない時も，局所的に構成して張り合わせることで，$\tau(X, \mathfrak{a}^t) \subseteq \mathcal{O}_X$ が定義される．$\mathfrak{a} = 0$ の時は，便宜的に $\tau(X, \mathfrak{a}^t) = 0$ と定める．$\mathfrak{a} = \mathcal{O}_X$ の時は，$\tau(X, \mathfrak{a}^t)$ は t によらない．これを $\tau(X)$ とかく．$\tau(X) = \mathcal{O}_X$ の時，X は**強 F 正則**という．

注意 4.5. 標数 0 の双有理幾何において，乗数イデアルというイデアル層が定義されているが，判定イデアルはその正標数版とみなされている．乗数イデアルは，歴史的には L^2 条件という解析的な文脈で誕生した概念であるのに対し，判定イデアルは可換環のイデアルのある種の閉方操作の考察の為に出来た代数的な概念である．面白いことに，出自も定義も全く違うこれらのイデアルは，多くの良い性質を共有していることがわかっている．勿論，相違点もいくつか存在する．本稿の主定理の証明に，先行研究 [CdB] の手法がそのまま使えないのはその相違点が原因である．

例 4.2 の R について， Tr_F を用いて考えると，$\tau(R) = R$ とわかる．判定イデアルは局所化や完備化で保たれるので，X が非特異ならば X は強 F 正則であることがわかる．

その為一般に，判定イデアル $\tau(X, \mathfrak{a}^t)$ が大きい程，$(X, \mathfrak{a}^t)$ の特異点は良い，と解釈される．実際，次が成り立っている．

命題 4.6. X を正規多様体， $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を連接イデアル層，t を正の実数とする．

1. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ ならば $\tau(X, \mathfrak{a}^t) \subseteq \tau(X, \mathfrak{b}^t)$.
2. 任意の $0 \leq \epsilon$ について $\tau(X, \mathfrak{a}^{t+\epsilon}) \subseteq \tau(X, \mathfrak{a}^t)$.
3. 任意の $0 \leq \epsilon \ll 1$ について $\tau(X, \mathfrak{a}^{t+\epsilon}) = \tau(X, \mathfrak{a}^t)$.

最後に，可逆層に付随する判定イデアルを定義する．

定義 4.7. L を可逆層とする．L の定める**漸近的判定イデアル**が $\tau(X, ||L||) := \sum_{n\geq 1} \tau(X, \mathfrak{b}(|nL|)^{1/n})$ により定まる．

5 主定理の証明

定理 1.1 の証明の為に，二つの命題を用意する．一つ目は，判定イデアルを用いた base point free theorem であり，[M] 内で本質的に証明された．

定理 5.1 ([M]). X は射影的で，標準層 ω_X が可逆層になっていると仮定する．L を巨大な可逆層，M を可逆層，H を非常に豊富な可逆層，$A = (\dim X + 1)H$ とする．$M - \omega_X - L$ が豊富と仮定すると，$\tau(X, ||L||) \otimes M \otimes A$ は大域切断で生成される．

これは，標数 0 でのある有名な base point free theorem ([L, Proposition 9.4.26]) の正標数での類似となっている．標数 0 の方の定理は，Nadel の消滅定理という小平型の消滅定理と Castelnuovo-Mumford regularity を組み合わせて示されていた．しかし，正標数では小平型の消滅定理は成り立たないので，Mustaţă は，Tr_F を用いて係数を大きくしていくテクニックと，藤田の消滅定理を用いた．

次に，二つ目の定理を紹介する．これは，命題 4.6 に関係しており，判定イデアルが不変になる十分条件を与えている．

定理 5.2 ([S]). $x \in X$ を固定する．この時，X と x のみに依存する $\delta > 0$ が存在して，任意のイデアル $\mathfrak{a}$ と $t > 0$ について，

$$t \cdot \mathrm{ord}_x(\mathfrak{a}) < \delta \Rightarrow \tau(X, \mathfrak{a}^t)_x = \tau(X)_x.$$

この定理の証明は，例 4.2 で紹介した Tr_F を用いて行われる．(詳しい証明は [S, Corollary 3.14] を参照．)

最後に，定理 5.1 と定理 5.2 を組み合わせて，定理 1.1 の証明を行う．

定理 *1.1* の証明. 簡単の為，ω_X が可逆層であると仮定する．非常に豊富な H を固定し，$A = (\dim X + 2)H$ とする．

$x \in X$ を固定した時，$\mathrm{ord}_x(||L||) = 0 \Rightarrow x \notin \mathrm{Bs}(nL + A)$ を示せば十分．

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_x(||L||) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \forall n \geq 1, \mathrm{ord}_x(||nL||) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \forall n \geq 1, \tau(X, ||nL||)_x = \tau(X)_x = \mathcal{O}_{X,x} \\ &\Rightarrow \quad \forall n \geq 1, x \notin \mathrm{Bs}(nL + A) \end{aligned}$$

より示された．ただしここで，二行目に定理 5.2 を，三行目に定理 5.1 を用いた． □

謝辞. この度は，城崎新人セミナーに参加させていただき，また発表の機会を与えていただきありがとうございました．様々な分野の人と交流が持てる大変貴重な機会となりました．セミナーを運営して下さった委員の皆さまに感謝いたします．

参考文献

[CdB] Cacciola, S. and Di Biagio, L., *Asymptotic base loci on singular varieties*, Math. Z. **275** (2013), no. 1-2, 151–166.

[G] Goodman, J., *Affine open subsets of algebraic varieties and ample divisors*, Ann. of Math. **89** (1969), no. 2, 160–183.

[L] Lazarsfeld, R., *Positivity in Algebraic Geometry II*, Ergeb. Math. Grenzgeb. 3. Folge, A Series of Modern Surveys in Mathematics, 49, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[M] Mustaţă, M., *The non-nef locus in positive characteristic*, A celebration of algebraic geometry, 535–551, Clay Math. Proc. **18**, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2013.

[N] Nakayama, N., *Zariski-decomposition and abundance*, MSJ Memoirs 14, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.

[S] Sato, K., *Stability of test ideals of divisors with small multiplicity*, preprint, arXiv:1602.02996.