Dynamical degree and arithmetic degree of fiber preserving self-maps

佐野　薫 *

京都大学，2016 年 2 月

この度は第 13 回城崎新人セミナーに参加して，有意義な時間を過ごすことができました．参加及び講演の機会を下さった運営委員の皆さんに，この場をお借りして感謝申し上げます．

本稿では, 数論的力学系の分野に属する算術次数の研究, 特に川口-シルバーマン予想について, 大まかな雰囲気が伝わるような紹介を試みたのち, 私が証明したことを紹介する. 因子やコホモロジーに関する基本的な知識があることが望ましい.

1　数論的力学系とは

力学系とは, ある規則に従って状態が変化していくようなモデルを考え, その性質を調べる分野である. その時間のパラメータが連続的か離散的かによって, それぞれ連続力学系, 離散力学系と呼ばれる.

幾何的な対象とその自己写像を考えたとき, 自己写像を繰り返し施すという操作を, 離散的な時間での状態の変化とみなすことで, 離散力学系が得られる. 数論的力学系で扱われるのは, このようにして得られる離散力学系である.

詳しくは, K を高さ関数という関数（後述）が定義できる体とし, X を K 上で定義される（射影）代数多様体とする. f を X の K 上で定義された自己有理写像とする. この X と f の組が, 数論的力学系の対象である.

2　川口-シルバーマン予想 (KSC)

今節では, 算術次数に関する研究の中で川口-シルバーマン予想（以降 KSC）と（私に）呼ばれる予想を紹介する. またその主張に用いられる, 力学系次数および算術次数を次節で定義する.

以降では K を代数体, X を K 上の滑らかな射影代数多様体, f を K 上定義された X の支配的自己有理写像とする.

Conjecture 2.1 (KSC)**.** 算術次数について以下が成立する.

(a) 算術次数はどの軌道に対しても定義できる.

(b) 算術次数は代数的整数である.

(c) X と f を固定したときに算術次数として現れる数は有限個しかない.

(d) 軌道が *Zariski-dense* ならば算術次数は力学系次数に一致する.

*ksano@math.kyoto-u.ac.jp

Remark 2.2. KSC の (a),(b),(c) は一般の支配的自己射 f に対しては証明されているが, (d) はそうではない. 次節で述べるように, 力学系次数は位相的な量を用いて定義されるのに対し, 算術次数は数論的な量を用いて定義される. (d) はそれらに関係があるという予想であり, 数論的に興味深いものである.

Remark 2.3. 以下の場合には KSC が証明されている.

- $\operatorname{rank}\mathrm{NS}(X) = 1$, f は射. [KS2, Theorem 2 (a)]
- $X = \mathbb{P}^N$, f は $\mathbb{A}^N$ の正則な自己同型射の $\mathbb{P}^N$ への延長. [KS2, Theorem 2 (b)]
- X は滑らかな射影曲面, f は自己同型. [KS2, Theorem 2 (c)]
- $X = \mathbb{P}^N$, f は $\mathbb{G}_m^N$ の自己単項式写像の $\mathbb{P}^N$ への延長で, 軌道として考えるのは $\mathbb{G}_m^N$ に含まれるもののみ.[S1, Proposition 19]
- X はアーベル多様体, f は任意. [KS1, Corollary 31], [S2, Theorem 2]

3 力学系次数, 算術次数

Definition 3.1 (力学系次数)**.** H を X 上の非常に豊富な因子とする. X の次元を d とおく. このとき

$$\delta_f := \lim_{n\to\infty} ((f^n)^* H \cdot H^{d-1})^{1/n}$$

を力学系次数という.

Remark 3.2. 力学系次数が収束し, 豊富な因子の取り方に依らないことはすでに知られている ([DS, Corollary 7], [G, Proposition 1.2]).

また, 自己線形写像

$$f^* \colon \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}}$$

のスペクトル半径を $\rho(f^*)$ と書くことにすると, 力学系次数が

$$\lim_{n\to\infty} \rho((f^n)^*)^{1/n}$$

に一致することが知られている（[DS, Proposition 1.2], [KS3, Remark 7]）. ここで $\mathrm{NS}(X)$ は $X \times_K \overline{K}$ の Néron-Severi 群であり,

$$\mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}} := \mathrm{NS}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

である. $\mathrm{NS}(X)$ が $H^2(X, \mathbb{Z})$ の部分群であることから, $\mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}}$ が有限次元ベクトル空間であることがわかり, さらに力学系次数が位相的な情報から定まる量であるとみなせる.

X が特に射影空間 $\mathbb{P}^N$ の場合, 力学系次数が

$$\lim_{n\to\infty} (\deg(f^n))^{1/n}$$

に一致することは容易にわかる.

力学系次数は自己有理写像の複雑さを表す量であるともみなせる.

Definition 3.3 (高さ関数)**.** 代数体 K（すなわち $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体）に対し M_K を K 上の標準付値全体とする．ここで標準付値とは, K 上の付値であって, $\mathbb{Q}$ に制限すると通常の絶対値あるいは p 進絶対値に一致するようなもののこととする．点 $P = [x_0 : x_1 : \ldots : x_N] \in \mathbb{P}(\overline{K})$ に対して, $P \in \mathbb{P}^N(L)$ となるよう K 上の十分大きな有限次拡大体 L を固定する．　このとき

$$h_{\mathbb{P}^N}(P) := \frac{1}{[L:\mathbb{Q}]} \cdot \sum_{v \in M_L} [L_v : \mathbb{Q}_v] \log(\max\{|x_0|_v, |x_1|_v, \ldots, |x_N|_v\})$$

を点 P の（絶対対数）高さといい,$h_{\mathbb{P}^N}$ を $\mathbb{P}^N$ 上の Weil 高さ関数という．

H を X 上の非常に豊富な因子とする．線形系と呼ばれる有限次 K ベクトル空間

$$\mathcal{L}(H) := \{f \in K(X)^\times :\ H + \div(f) \geq 0\} \cup \{0\}$$

が得られる．$N := \dim_K \mathcal{L}(H) - 1$ として $\mathcal{L}(H)$ の K 上の基底 $\{f_0, f_1, \ldots f_N\}$ を固定する．このとき閉埋め込み $\varphi_H \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ が

$$\varphi_H(P) := [f_0(P) : f_1(P) : \cdots f_N(P)]$$

により定まる．X 上の H に関する Weil 高さ関数を

$$h_H(P) := h_{\mathbb{P}^N} \circ \varphi_H$$

で定義する．

さらに一般に実因子 $D \in \mathrm{NS}(X)_\mathbb{R}$ が $D = \sum a_i H_i$ と非常に豊富な因子の有限実線形和で表し, D に関する Weil 高さ関数を

$$h_D := \sum a_i h_{H_i}$$

で定義する．

Remark 3.4. 実因子 D に関する Weil 高さ関数の定義には高々有界関数の任意性がある．

Definition 3.5 (算術次数)**.** 任意の n に対して f^n が定義できるような点 $P \in X(\overline{K})$ 全体を $X_f(\overline{K})$ とおく．H を X 上の豊富な因子とすると, $P \in X_f(\overline{K})$ の算術次数が

$$\alpha_f(P) := \lim_{n\to\infty} \max\{h_H(f^n(P)), 1\}^{1/n}$$

により定義される．

Remark 3.6. 算術次数が収束するとすれば, それは豊富な因子 H の取り方に依らないことが知られている ([KS3, Proposition 12])．$P \in X_f(\overline{K})$ の算術次数が $f(P)$ の算術次数に等しいことが容易にわかる．従って算術次数は軌道に対して定まる．

また算術次数は高さがどの程度の速さで増加していくのかを表しており, 軌道の複雑さを表す量であるとみなせる．また高さ関数を用いて定義されるため, 数論的な量であるともいえる．

4　主定理

最後に私が KSC に関して証明した, 以下の定理を挙げて本稿を閉じる．

Theorem 4.1 (S.)**.** X_i がそれぞれ、次にあげる条件のいずれかをみたすとする

- $\operatorname{rank} \mathrm{NS}(X_i) = 1, b_1(X_i) = 0$

- X_i はアーベル多様体
- X_i は *K3* 曲面
- X_i は *Enriques* 曲面

このとき、$\prod_{i=1}^{n} X_i$ の任意の自己射に対して *KSC* が成り立つ. すなわち, 任意の自己射 f と *Zariski-dense* な軌道を持つ任意の点 $P \in X(\overline{K})$ に対して

$$\alpha_f(P) = \delta_f$$

が成り立つ.

参考文献

[DS] Dinh, T. C., Sibony, N., *Une borne supérieure de l'entropie topologique d'une application rationnelle*, Ann. of Math. (2) 161 (2005), no. 3, 1637-1644.

[G] Guedj, V., *Ergodic properties of rational mappings with large topological degree*, Ann. of Math. (2) 161 (2005), no. 3, 1589-1607.

[KS1] Kawaguchi, S., Silverman, J. H. *Dynamical canonical heights for Jordan blocks, arithmetic degrees of orbits, and nef canonical heights on abelian varieties*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc., preprint, 2013, http://arxiv.org/abs/1301.4964

[KS2] Kawaguchi, S., Silverman, J. H., *Examples of dynamical degree equals arithmetic degree*, Michigan Math. J. **63** (2014), no. 1, 41-63.

[KS3] Kawaguchi, S., Silverman, J. H., *On the dynamical and arithmetic degrees of rational self-maps of algebraic varieties*, to appear in J. Reine Angew. Math., preprint, 2013, http://arxiv.org/abs/1208.0815.

[S1] Silverman, J. H., *Dynamical degree, arithmetic entropy, and canonical heights for dominant rational self-maps of projective space*, Ergodic Theory Dynam. Systems **34** (2014), **34** (2014), no. 2, 647-678.

[S2] Silverman, J. H., *Arithmetic and dynamical degrees on abelian varieties*, preprint, 2015, http://arxiv.org/abs/1501.04205.