一般化屈折 Lévy 過程の屈折複合 Poisson 過程による近似

野場 啓 * 　矢野 孝次

京都大学大学院理学研究科，2016 年 2 月

1 序

Kyprianou と Loeffen[3] は, spectrally negative な Lévy 過程 X に対して**屈折 Lévy 過程**を定義した. 彼らの屈折 Lévy 過程は定数 $c > 0$ と $\alpha > 0$ を含む確率微分方程式

$$U_t - U_0 = X_t - \alpha \int_0^t 1_{\{U_s > c\}} ds \tag{1.1}$$

の解として定義される. 彼らは U の脱出問題と吸収壁ポテンシャル測度を, X のスケール関数を用いて特徴づけた.

論文 [4] で我々は, Kyprianou–Loeffen の屈折 Lévy 過程を一般化した. 具体的には, Lévy 測度が異なる二つの Lévy 過程 X, Y に対し, 屈折 Lévy 過程 U を, 値が正の時は X の, 値が負の時は Y の挙動をする確率過程として構成した. その際, X が有界変動な標本路を持つ場合は確率微分方程式を, X が有界変動でない標本路を持つ場合は周遊理論を用いて定義した. この定義に基づき, U の脱出問題と吸収壁ポテンシャル測度を, X と Y のスケール関数を用いて特徴づけた. また, 周遊理論で定義した屈折 Lévy 過程の, 確率微分方程式によって定義した屈折 Lévy 過程による, ポテンシャル測度を用いた近似を行った. これによって, 周遊理論で定義した屈折 Lévy 過程は間接的に, 確率微分方程式によって特徴づけられる.

我々が定義した屈折 Lévy 過程に関する脱出問題と吸収壁ポテンシャル測度については [5] で報告した. この報告では, 周遊理論で定義した屈折 Lévy 過程の, 確率微分方程式によって定義した屈折 Lévy 過程による, ポテンシャル測度を用いた近似について述べる.

2 Spectrally negative な Lévy 過程

$\left(X = \{X_t : t \geq 0\}, \mathbb{P}_x^X\right)$ を spectrally negative な Lévy 過程とする. このとき, Laplace 指数

$$\Psi_X(\lambda) := \log \mathbb{E}_0^X \left(e^{\lambda X_1}\right) \tag{2.1}$$

は $\lambda \geq 0$ で有限であることが知られている. Ψ_X の逆関数を $\theta \geq 0$ で

$$\Phi_X(\theta) = \inf\{\lambda \geq 0 : \Psi_X(\lambda) = \theta\} \tag{2.2}$$

*knoba@math.kyoto-u.ac.jp

と表すことにする. 特に, X の標本路が有界変動な場合は, Laplace 指数は

$$\Psi_X(\lambda) = \delta_X\lambda - \int_{(-\infty,0)} \left(1 - e^{\lambda y}\right) \Pi_X(dy) \tag{2.3}$$

で与えられる. ただし, $\delta_X > 0$ であり, Lévy 測度 Π_X は $\Pi_X[0,\infty) = 0$ および $\int_{(-\infty,0)}(1 \wedge |y|)\, \Pi_X(dy) < \infty$ を満たす. X の標本路が非有界変動な場合は, Laplace 指数は

$$\Psi_X(\lambda) = \gamma_X\lambda + \frac{\sigma_X^2}{2}\lambda^2 - \int_{(-\infty,0)} \left(1 - e^{\lambda y} + \lambda y 1_{(-1,0)}(y)\right) \Pi_X(dy) \tag{2.4}$$

で与えられる. ただし, $\gamma_X \in \mathbb{R}$, $\sigma_X \geq 0$ であり, Lévy 測度 Π_X は $\Pi_X[0,\infty) = 0$ および $\int_{(-\infty,0)}\left(1 \wedge y^2\right) \Pi_X(dy) < \infty$ を満たす.

定義 2.1. $q \geq 0$ に対し, 関数 $W_X^{(q)} : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ を, $(-\infty,0)$ 上では $W_X^{(q)} = 0$, $[0,\infty)$ では連続で, $\beta > \Phi_X(q)$ に対し

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W_X^{(q)}(x)dx = \frac{1}{\Psi_X(\beta) - q} \tag{2.5}$$

を満たす関数として定義する. この関数を**スケール関数**と呼ぶ.

Laplace 指数やスケール関数について, 詳しくは [2] を参照されたい.

3 一般化屈折 Lévy 過程

$\left(X = \{X_t : t \geq 0\}, \mathbb{P}_x^X\right)$, $\left(Y = \{Y_t : t \geq 0\}, \mathbb{P}_x^Y\right)$ を spectrally negative な Lévy 過程とする. X は Gaussian part を持たないと仮定する. X の標本路が有界変動なとき, 強 Markov 過程 U を確率微分方程式

$$U_t = U_0 + \int_{(0,t]} 1_{\{U_{t-} \geq 0\}} dX_s + \int_{(0,t]} 1_{\{U_{t-} < 0\}} Y_s, \tag{3.1}$$

の強解として定義する (強解を持つことの証明は [3] の 3 章と同様にできる. X と Y が複合 Poisson 過程ならば一意性もすぐにわかる.). X の標本路が有界変動でないとき, 周遊測度 n^U を, 非負可測汎関数 F に対し,

$$n^U\left(F\left((U_t)_{t<\tau_0^-}, (U_{t+\tau_0^-})_{t\geq 0}\right)\right) = n^X\left(\mathbb{E}_x^Y(F(w,(Y_t)_{t\geq 0}))\Big|_{\substack{x=X(\tau_0^-)\\ w=(X_t:t<\tau_0^-)}}\right) \tag{3.2}$$

を満たすように定義し, 周遊理論を用いて n^U に対応する 0 での停留がない強 Markov 過程 U を定義する. 上記の方法で定義した強 Markov 過程 U のことを **(一般化) 屈折 Lévy 過程**と呼ぶ.

$x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\tau_x^+ = \tau_x^+(U) = \inf\{t > 0 : U_t > x\}, \quad \tau_x^- = \tau_x^-(U) = \inf\{t > 0 : U_t < x\} \tag{3.3}$$

とする.

定理 3.1 ([4])**.** $q > 0$ と非負可測関数 f に対し, U の原点出発ポテンシャル測度は

$$R_U^{(q)}f(0) := \mathbb{E}_x^X\left(\int_0^\infty e^{-qt}f(U_t)dt\right) = \frac{1}{q}\frac{\int_0^\infty e^{-\Phi_X(q)y}f(y)dy + \int_{(-\infty,0)\times(0,\infty)} R_{Y^0}^{(q)}f(u)K_X^{(q)}(du,dv)}{\int_0^\infty e^{-\Phi_X(q)y}dy + \int_{(-\infty,0)\times(0,\infty)} R_{Y^0}^{(q)}1(u)K_X^{(q)}(du,dv)} \tag{3.4}$$

で与えられる. また, これを用いて, 原点以外を出発するポテンシャル測度は

$$R_U^{(q)} f(x) = R_{Y^0}^{(q)} f(x) + e^{\Phi_Y(q)x} R_U^{(q)} f(0), \quad x < 0 \tag{3.5}$$

および

$$R_U^{(q)} f(x) = \underline{R}_X^{(0,q)} f(x) + \int_{(-\infty,0)\times(0,\infty)} R_U^{(q)} f(u) G_X^{(q)}(x, du, dv), \quad x > 0 \tag{3.6}$$

と表される. ただし, $\underline{R}_X^{(0,q)} f(x)$ は X に対し原点を下側吸収壁とするポテンシャル測度

$$\underline{R}_X^{(0,q)} f(x) = \mathbb{E}_x^X \left(\int_0^{\tau_0^-} e^{-qt} f(X_t) dt \right) \tag{3.7}$$

とする.

定理 3.2 ([4])**.** $x \in [b, a]$ と $q \geq 0$ に対し,

$$\mathbb{E}_x^U \left(e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \tau_b^- \right) = \frac{V_U^{(q)}(b, x)}{V_U^{(q)}(b, a)} \tag{3.8}$$

が成り立つ. ただし,

$$V_U^{(q)}(b, x) = \begin{cases} W_X^{(q)}(x) W_Y^{(q)}(-b) \Big(\Psi'_X(0) \vee 0 \Big) \\ \quad + \int_{(-\infty,0)\times(0,\infty)} \big(W_X^{(q)}(x) W_Y^{(q)}(-b) e^{\Phi_Y(0)u} \\ \quad\quad - W_Y^{(q)}(u-b) W_X^{(q)}(x-v) \big) K_X(du, dv), & x \in (0, a] \\ W_Y^{(q)}(x-b), & x \in [b, 0] \end{cases} \tag{3.9}$$

$$K_X(du, dv) := \Pi_X(du - v) dv \tag{3.10}$$

である.

定理 3.2 より, $b \uparrow \infty$ とする極限を計算することで, 以下の系が得られる.

系 3.3 ([4])**.** $x \in (-\infty, a]$ と $q \geq 0$ に対し,

$$\mathbb{E}_x^U \left(e^{-q\tau_a^+} \right) = \frac{\overline{V}_U^{(q)}(x)}{\overline{V}_U^{(q)}(a)} \tag{3.11}$$

が成り立つ. ただし,

$$\overline{V}_U^{(q)}(x) = \begin{cases} W_X^{(q)}(x) \Big(\Psi'_X(0) \vee 0 \Big) \\ \quad + \int_{(-\infty,0)\times(0,\infty)} \big(W_X^{(q)}(x) e^{\Phi_Y(0)u} \\ \quad\quad - W_X^{(q)}(x-v) e^{\Phi_Y(q)u} \big) K_X(du, dv), & x \in (0, a] \\ e^{\Phi_Y(q)x}, & x \in (-\infty, 0] \end{cases} \tag{3.12}$$

である. また, $\overline{V}_U^{(q)}(x)$ は連続で x について単調増加な関数である.

4 複合 Poisson 屈折 Lévy 過程による近似

X の標本路が有界変動でない場合は周遊理論を用いて屈折 Lévy 過程 U を定義したが, この U を確率微分方程式 (3.1) を用いて特徴づけたい. 具体的には, 確率微分方程式 (3.1) の解による U のポテンシャル測度を用いた近似について述べる.

任意の spectrally negative な Lévy 過程 $\left(Z = \{Z_t : t \geq 0\}, \mathbb{P}_x^Z\right)$ の Laplace 指数を

$$\Psi_Z(\lambda) = \gamma_Z \lambda + \frac{\sigma_Z^2}{2}\lambda^2 - \int_{(-\infty,0)} \left(1 - e^{\lambda y} + \lambda y 1_{(-1,0)}(y)\right) \Pi_Z(dy) \tag{4.1}$$

と表すとき, $\left\{Z^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ を spectrally negative な複合 Poisson 過程の列で Laplace 指数が

$$\begin{aligned}\Psi_{Z^{(n)}}(\lambda) = \gamma_Z \lambda - \sigma_Z^2 n^2 &\left(1 - e^{\lambda(-\frac{1}{n})} + \lambda\left(-\frac{1}{n}\right)\right) \\ &- \int_{\left(-\infty,-\frac{1}{n}\right)} \left(1 - e^{\lambda y} + \lambda y 1_{\left(-1,-\frac{1}{n}\right)}(y)\right) \Pi_Z(dy) \end{aligned} \tag{4.2}$$

で与えられるものとする.

$\left\{X^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\left\{Y^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ をそれぞれ X と Y から上記の方法によって定まる spectrally negative な複合 Poisson 過程の列とし, $\left\{X^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\left\{Y^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は独立とする. 確率微分方程式 (3.1) の X を $X^{(n)}$ に, Y を $Y^{(n)}$ に変えた方程式 (3.1) の一意の強解を $U^{(n)}$ とする.

定理 4.1 ([4])**.** $q > 0$ と連続関数 f で $\lim_{x\uparrow\infty} f(x) = \lim_{x\downarrow-\infty} f(x) = 0$ を満たすものに対し,

$$R_{U^{(n)}}^{(q)} f \to R_U^{(q)} f \text{ uniformly as } n \uparrow \infty \tag{4.3}$$

が成り立つ.

この定理から, $U^{(n)}$ が U に càdlàg 関数空間上で分布収束することが示される. 以下でこの定理の証明の概略を与える.

1) ポテンシャル測度の各点収束性, つまり

$$R_{U^{(n)}}^{(q)} f(x) \to R_U^{(q)} f(x) \; as \; n \uparrow \infty \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.4}$$

を示す. 定理 3.1 における $R_{U^{(n)}}^{(q)} f(x)$ と $R_U^{(q)} f(x)$ の表示において, 優収束定理を用いればよい.

2) $\{\overline{V}_{U^{(n)}}^{(q)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ が同程度連続であることを示す. 系 3.3 より, $\overline{V}_{U^{(n)}}^{(q)}$ と $\overline{V}_U^{(q)}$ は連続で単調増加な関数であるから, $\overline{V}_{U^{(n)}}^{(q)}$ が $\overline{V}_U^{(q)}$ に各点収束することを示せば一様収束することがわかり, 同程度連続性も求められる. $x \leq 0$ の時は, $\overline{V}_{U^{(n)}}^{(q)} = e^{\Phi_{Y^{(n)}}(q)x}$ であるから, $Y^{(n)}$ の定義より各点収束はすぐにわかる. $x > 0$ の時は, $\overline{V}_{U^{(n)}}^{(q)}$ の各点収束は, $\overline{V}_{U^{(n)}}^{(q)}$ の定義より $\mathbb{E}_0^{U^{(n)}}(e^{-q\tau_x^+})$ の $\mathbb{E}_0^U(e^{-q\tau_x^+})$ への各点収束と同値である. 強 Markov 性を用いて,

$$R_{U^{(n)}}^{(q)} 1_{(-\infty,x)}(0) = \frac{1}{q} - \mathbb{E}_0^{U^{(n)}}(e^{-q\tau_x^+})\left(\frac{1}{q} - R_{U^{(n)}}^{(q)} 1_{(-\infty,x)}(x)\right) \tag{4.5}$$

を示す. **1)** を用いれば, $R_{U^{(n)}}^{(q)} 1_{(-\infty,x)}(0)$ の $R_U^{(q)} 1_{(-\infty,x)}(0)$ への収束や, $R_{U^{(n)}}^{(q)} 1_{(-\infty,x)}(x)$ の $R_U^{(q)} 1_{(-\infty,x)}(x)$ への収束が示せるため, $\overline{V}_{U^{(n)}}^{(q)}$ の各点収束を示せる.

3) コンパクト区間上の一様収束, すなわち $k>0$ を固定したときに

$$\lim_{n\uparrow\infty}\sup_{x\in[-k,k]}\left|R^{(q)}_{U^{(n)}}f(x)-R^{(q)}_{U}f(x)\right|=0 \tag{4.6}$$

となることを示す. **1)** が得られているため, $\{R^{(q)}_{U^{(n)}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ の $[-k,k]$ 上での同程度連続性を示すことができれば十分である. 強 Markov 性と系 3.3 を用いると,

$$\left|\mathbb{E}^{U^{(n)}}_{y}\left(\int_0^\infty e^{-qt}f(U^{(n)}_t)dt\right)-\mathbb{E}^{U^{(n)}}_{x}\left(\int_0^\infty e^{-qt}f(U^{(n)}_t)dt\right)\right| \tag{4.7}$$

$$\leq\frac{2}{q}\|f\|\left(1-\mathbb{E}^{U^{(n)}}_{x}\left(e^{-q\tau^+_y}\right)\right)=\frac{2}{q}\|f\|\left(1-\frac{\overline{V}^{(q)}_{U^{(n)}}(x)}{\overline{V}^{(q)}_{U^{(n)}}(y)}\right) \tag{4.8}$$

とできて, **2)** に帰着する.

4) 無限遠での一様な減衰, すなわち

$$\lim_{k\uparrow\infty}\sup_{|x|>k}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|R^{(q)}_{U^{(n)}}f(x)\right|=0 \tag{4.9}$$

となることを示す. x が正の場合は $k'>0$ と $k''>0$ に対し,

$$\sup_{x>k'+k''}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|R^{(q)}_{U^{(n)}}f(x)\right| \tag{4.10}$$

$$\leq\sup_{x>k'+k''}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\mathbb{E}^{U^{(n)}}_{x}\left(\int_0^{\tau^-_{k'}}e^{-qt}f(U^{(n)}_t)dt\right)\right|+\sup_{x>k'+k''}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\mathbb{E}^{U^{(n)}}_{x}\left(\int_{\tau^-_{k'}}^\infty e^{-qt}f(U^{(n)}_t)dt\right)\right| \tag{4.11}$$

$$\leq\frac{1}{q}\sup_{x>k'+k''}|f(x)|+\frac{1}{q}\|f\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}^{X^{(n)}}_{k'+k''}\left(e^{-q\tau^-_{k'}}\right) \tag{4.12}$$

を満たすため, (4.12) の二つの項を十分小さくするように k' と k'' をとればよい. x が負の場合も同様にできる.

5) 任意の $k>0$ に対して,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|R^{(q)}_{U^{(n)}}f(x)-R^{(q)}_{U}f(x)\right|\leq\sup_{|x|\leq k}\left|R^{(q)}_{U^{(n)}}f(x)-R^{(q)}_{U}f(x)\right|+2\sup_{|x|>k}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|R^{(q)}_{U^{(n)}}f(x)\right| \tag{4.13}$$

が成り立つため, **3)** と **4)** を用いて主張 (4.3) が示される.

参考文献

[1] J. Bertoin. Lévy processes. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[2] A. E. Kyprianou. Fluctuations of Lévy Processes with Applications. Second edition. Universitext, Springer, 2014.

[3] A. E. Kyprianou and R. L. Loeffen. Refracted Lévy processes. Ann. Inst. Henri Poincaré. 26(2010), 24–44.

[4] K. Noba and K. Yano. Generalized refracted Lévy process and its application to exit problem. in preparation.

[5] 野場 啓, 矢野 孝次. 屈折 Lévy 過程の一般化と脱出問題. 無限分解可能過程に関連する諸問題 (20), 共同研究リポート 352(2016), 118–126.