Components of stable Auslander–Reiten quivers that contain non-periodic Heller lattices of string modules: the case of the Kronecker algebra $\mathcal{O}[X,Y]/(X^2,Y^2)$ over complete discrete valuation ring

宮本　賢伍 *

大阪大学大学院　情報科学研究科，2016 年 2 月

1　謝辞

この度は, 城崎新人セミナーで講演させて頂く機会を頂きましたことを, 城崎新人セミナー運営委員会の皆様と関係者の皆様に深く感謝申し上げます.

2　序

代数の表現論の大きな目標の一つは, 代数上の加群圏の構造を明らかにすることであるが, その代数的な解析手法にクイバーを用いる手法がある. 体上の行列を標準化する問題のひとつの答えが Jordan 標準形の理論だが, これを広範囲に一般化した理論が 1970 年代に導入された Auslander–Reiten 理論である. Auslander-Reiten 理論では, 直既約加群の完全代表系に対して almost split sequence と呼ばれる特殊な短完全列を構成し, その情報をもとにして直既約加群の完全代表系を頂点とするクイバーを導入することで, 抽象的な代数の加群圏を可視化して体系的に研究する. このとき得られたクイバーを Auslander–Reiten クイバーといい, これから射影成分を削ったものを安定 Auslander–Reiten クイバーという. そこで, 表現論の古典的な問題として, 様々な代数に対して Auslander–Reiten クイバーを記述せよというものが考えられてきた. 体上の Auslander–Reiten クイバーの具体的な計算例は多くみられるが（[ASS] などを参照）, 完備離散付置値環上の代数に関しては, 一般論のみが先行しており, その一般論が具体的な計算は困難であるということも示唆していたためほとんど計算されていなかった. しかし, Heller lattices と呼ばれる特別な加群を切り口にすることで, その代数の安定 Auslander–Reiten クイバーの計算が可能である可能性がある点に着目し, ここでは完備離散付値環上 $\mathcal{O}$ 上の Kronecker 代数 $\mathcal{O}[X,Y]/(X^2,Y^2)$ の非周期的な Heller lattices を含むような安定 Auslander–Reiten クイバーの (ただひとつの) 連結成分を完全に決定した.

*k-miyamoto@ist.osaka-u.ac.jp

3 almost split sequence の定義とその構成.

$\mathcal{O}$ を完備離散付値環とし, κ を $\mathcal{O}$ の剰余体, $\mathcal{K}$ を $\mathcal{O}$ の商体とし, これらは代数閉体と仮定する. 本論を通して, 特に断らない限りはテンソル積は $\mathcal{O}$ 上でとる. $\mathcal{O}$ 上の代数 A が有限階数の自由代数のとき, A を **$\mathcal{O}$-order** であるという. 以下, A は Gorenstein $\mathcal{O}$-order なものを考える. 有限生成右 A-加群 M が ***A*-lattice** であるとは, M が有限階数の自由 $\mathcal{O}$-加群であるときをいう. 今の状況では, A-lattice とは, Cohen–Macaulay 加群のことである. *latt*-A を A-lattices を対象にもつような mod-A の充満部分加法圏とする. $\mathcal{O}$ は完備離散付値環なので, $M \in$ *latt*-A が直既約であることと, $\mathrm{End}_A(M)$ は局所的であることは同値である. 完備離散付値環上の代数は半完全代数となるので, $M \in$ *latt*-A に対して M が直既約であることと $\mathrm{End}_A(M)$ の冪等元が $0, 1$ のみであることは必要十分である. また, 任意の A-lattices は射影被覆をもつ.

以下, しばらく almost split sequence の定義を行う為の準備をする. $f : M \to N$ in *latt*-A が**既約写像**とは次の 2 条件を満たしているときをいう.

(1) f は分裂単射でも分裂全射でもない.

(2) *latt*-A の可換図式

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & \circlearrowleft & N \\ & W \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

があったとき, f_1 が分裂単射でないか, f_2 が分裂全射ではない.

定義から, 全ての *latt*-A の射は, 既約写像の合成の $\mathcal{O}$ 上の一次結合でかけるので, 既約写像は写像を構成する最小のピースである. 既約写像を用いて almost split sequence は定義される.

3.1 Definition. *latt*-A の短完全列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

が M を ending にもつ **almost split sequence** であるとは, f と g が既約であるときをいう.

M を ending にもつ almost split sequence は完全列の同型を除いて一意的に決まる. また,L を starting にもつ almost split sequence も完全列の同型を除いて一意的に決まる. そこで M を ending にもつ almost split sequence が

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

であったとき, **AR 転移**を $\tau(M) = L,\ \tau^{-1}(L) = M$ と定めることができる. 直既約 A-lattice M が与えられたとき, いつでも M を ending にする almost split sequence はいつでも存在するとは限らない.

3.2 Theorem ([RR], Theorem 6)**.** A-lattice M が非射影的で直既約とする. M を ending（resp. starting）にもつような almost split sequence が存在するための必要十分条件は $M \otimes \mathcal{K}$ が $A \otimes \mathcal{K}$-加群として射影的（移入的）であることである.

この条件を満たすような lattice として **Heller lattice** がある. ここで **Heller lattice** とは, 直既約 $A \otimes \kappa$-加群の A-加群としての射影被覆の核に現れる直既約因子である. 従って Heller lattices を ending にもつ almost split sequence が存在する.

さて, 非射影的な直既約 A-lattice M で $M\otimes\mathcal{K}$ が射影的であるものをとったとき, これを ending にもつ almost split sequence を次のようにして構成することができる. まず, M の射影被覆 $p : P \to M$ に中山関手 $\nu := D(\mathrm{Hom}_A(-, A)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Hom}_A(-, A), \mathcal{O})$ を施すと

$$\nu(p) : \nu(P) \longrightarrow \nu(M)$$

を得る. L を $D(\mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_A(p, A)))$ とおけば, 完全列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \nu(P) \longrightarrow \nu(M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(\mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_A(p, A)), \mathcal{O})$$

を得るが, $\mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_A(p, A))$ は A-lattice $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ker}(p), A)$ の部分 A-加群とみれるので自由 $\mathcal{O}$ 加群である. 従って末項は 0 となり, 短完全列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \nu(P) \longrightarrow \nu(M) \longrightarrow 0$$

を得る. これの $\varphi : M \to \nu(M)$ に関する引き戻しを考える.

3.3 Proposition ([AKM], Proposition 1.14)**.** A を Gorenstein $\mathcal{O}$-order として, M は非射影的直既約 A-lattice で $M \otimes \mathcal{K}$ が射影的であるとする.

$$p : P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

を M の射影被覆とし, $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, \nu(M))$ をひとつとり, φ に関する引き戻しを考える.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & \nu(P) \arrow[r, "\nu(p)"] & \nu(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

このとき次の 2 条件は同値である.

(1) 引き戻しにより得られた短完全列は almost split sequence である.

(2) 次の 3 条件を満たす.

  (i) φ は $\nu(p)$ を経由しない.

  (ii) L は直既約 A-lattices である.

  (iii) 任意の $f \in \mathrm{radEnd}_A(M)$ に対して φf は $\nu(p)$ を経由する.

この定理は, almost split sequence の構成は M から $\nu(M)$ への A-準同型をうまいこと与え, その引き戻しを考えればよいというのが本質的なところである.

almost split sequence の情報によって, 安定 Auslander–Reiten クイバーは記述される.

3.4 Definition. A の *latt*-A に関する**安定 Auslander–Reiten クイバー** $\Gamma_s(A)$ は次のルールで構成されるクイバーである.

- 頂点には非射影的直既約 A-lattices であって, $\mathcal{K}$ とテンソル積をとったものが射影的であるものの完全代表系をおく.
- 既約写像 $f : M \to N$ が存在するときに矢印 $M \to N$ を引く.
- valuation $v(M \to N) = (a, b)$ を次のルールで与える.
  - (i) N を ending にもつ almost split sequence の中央項に M が a 回現れる.
  - (ii) M を starting にもつ almost split sequence の中央項に N が b 回現れる.

4 主結果

以下, A は $\mathcal{O}$ 上の Kronecker 代数とする. このとき, A の Heller lattices は AR 転移で周期的なものと非周期なものが現れるが, 非周期的なものに関しては次が成り立つ.

4.1 Lemma. *latt-A* の中には非周期的な直既約 Heller lattices の列

$$\cdots \xleftarrow{\tau} Z_n \xleftarrow{\tau} Z_{n+1} \xleftarrow{\tau} Z_{n+2} \xleftarrow{\tau} \cdots \quad (n \in \mathbb{Z})$$

がただひとつ存在する. 更に, すべての非周期的な直既約 Heller lattices はこの列の中に現れる.

この補題より, 非周期的な Heller lattices を含む安定 Auslander–Reiten クイバーの連結成分はただ一つであることがわかる. この連結成分を $\mathcal{C}$ と置こう. 今回の主結果はこの $\mathcal{C}$ の形状を完全に決定したというものである.

まず, 非周期な直既約 Heller lattice Z_n を ending にもつ almost split sequences を定理 3.3 によって構成する. このとき, 得られた almost split sequences の中央項の非射影直既約成分は一つしかない. これを E_n とおく. 再び定理 3.3 によって E_n を ending にもつ almost split sequences を構成すれば, その中央項の非射影直既約は二つであって, 一つは Z_{n-1} となる. もう一方を F_n とかくことにする. すなわち現段階で A の安定 Auslander–Reiten クイバーは以下の形状をしている.

$$\begin{tikzcd}
 & & F_{-1} \arrow[dr] & & F_0 \arrow[ll, dotted, "\tau"'] \arrow[dr] & & F_1 \arrow[ll, dotted, "\tau"'] \arrow[dr] & & F_2 \arrow[ll, dotted, "\tau"'] \arrow[dr] & & \\
\cdots & E_{-2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & E_{-1} \arrow[ll, dotted, "\tau"'] \arrow[ur] \arrow[dr] & & E_0 \arrow[ll, dotted, "\tau"'] \arrow[ur] \arrow[dr] & & E_1 \arrow[ll, dotted, "\tau"'] \arrow[ur] \arrow[dr] & & E_2 \arrow[ll, dotted, "\tau"'] \arrow[dr] & \cdots \\
 & & Z_{-2} \arrow[ur] & & Z_{-1} \arrow[ll, dotted, "\tau"'] \arrow[ur] & & Z_0 \arrow[ll, dotted, "\tau"'] \arrow[ur] & & Z_1 \arrow[ll, dotted, "\tau"'] \arrow[ur] & & Z_2 \arrow[ll, dotted, "\tau"']
\end{tikzcd}$$

almost split sequences の構成が有限回で終了する, あるいは統率的に出来てしまう場合には問題ないが, 実際にはそううまくいかない. そこで, ある程度までは almost split sequences を構成して, その後はクイバーの形状の決定に関する定理などを用いることで $\mathcal{C}$ の形状の候補を絞っていくという手法をとる.

4.2 Theorem ([Z])**.** (Q, v, τ) を非周期な連結な付値安定な転移クイバーとし, Q 上にゼロでない subadditive な関数 d が存在するとする. このとき以下のうちいずれか一つが成り立つ.

(i) Q の付値は自明で, 全ての頂点から出る矢印は丁度 2 本であって, 更に d は additive かつ有界である.

(ii) ある付値クイバー Δ が存在して $Q = \mathbb{Z}\Delta$ である.

従って, もし $\mathcal{C}$ が Auslander–Reiten クイバーで不変であるような subadditive な関数を持つかどうかがひとつの指標になる. 今回の場合において, $\mathcal{C}$ 上の additive な関数を以下のように構成することに成功した.

$$\begin{array}{rccl}
d' : & \mathcal{C}_0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & \cup & & \cup \\
 & M & \longmapsto & \sharp\{M \otimes \kappa \text{ の非射影的な直既約直和因子 }\}
\end{array}$$

関数 d' は $\mathcal{C}$ 上の AR 転移で不変であって, 更に additive という性質をもつ. よって, C は $\mathbb{Z}\Delta$ の形をしている. 更に, d' が additive という性質から $\mathcal{C}$ はループを持たないことがわかる. そこで Δ が決定されれば, $\mathcal{C}$ が決定されるが, 主結果は以下の通りである.

<u>Main Result</u>. $A = \mathcal{O}[X,Y]/(X^2,Y^2)$ において, $A \otimes \kappa$ の非周期な直既約 Heller lattices を含む安定 Auslander-Reiten クイバーの連結成分 $\mathcal{C}$ について, 非周期な直既約 Heller lattices はその境界に現れて, $\mathcal{C} \simeq \mathbb{Z}A_\infty$ である.

参考文献

[AKM] S. Ariki, R. Kase and K. Miyamoto, On Components of stable Auslander -Reiten quivers that contains Heller lattices: the case of truncated polynomial rings', arXive:1408.6452, 2014. to appear in Nagoya Math. J.

[ASS] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński, Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, London Mathematical Society Student Texts **65**, 2006.

[RR] K. W. Roggenkamp and W. Rump, Orders in non-semisimple algebras, Communications in Algebra **27** Issue **11**, 5267-5301, 1981.

[M] K. Miyamoto, Components of stable Auslander–Reiten quivers that contain non-periodic Heller lattices of string modules: the case of the Kronecker algebra $\mathcal{O}[X,Y]/(X^2,Y^2)$ over a complete D.V.R., arXiv:1601.06256

[Z] Y. Zhang, The structure of stable components, Canadian Journal of Mathematics vol. **43**(3), 1991, 652–672.