有限代数の Hilbert スキームについて

松澤陽介 *

東京大学大学院数理科学研究科，2016 年 2 月

1　イントロダクション

k を代数閉体、A を k 上の可換代数とする。この時、A の k 上の r 点の Hilbert スキーム $\mathrm{Hilb}^r(A)$ とは次のようなスキームのことである (点の Hilbert スキームについては例えば [Be] が分かりやすい)。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hilb}^r(A)(R)\\
&= \left\{ \phi : A \otimes_k R \to E \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi \text{ is an } R\text{-algebra surjection and} \\ E \text{ is locally free of rank } r \text{ as an } R\text{-module} \end{array} \right\} \Big/ \sim_{isom}\\
&\simeq \left\{ I \subset A \otimes_k R \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{I is an ideal and} \\ A \otimes_k R/I \text{ is locally free of rank } r \text{ as an } R\text{-module} \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

ただしここで R は任意の k 代数である。

例えば、$A = \mathbb{C}[x,y]/(x^a, y^b)$ のとき (a, b は自然数)、$\mathrm{Hilb}^r(A)$ は $\mathbb{C}$ 上の射影的スキームとなり、classical topology についてのオイラー数は

$$\chi(\mathrm{Hilb}^r(A)) = \#\{\text{partition of } r \text{ contained in the box of size } a \times b\} =: p(r; a, b)$$

となる。

sketch of the proof. 作用 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2 \curvearrowright \mathrm{Spec}A; (t,s)\cdot(x,y) = (tx, sy)$ から作用 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2 \curvearrowright \mathrm{Hilb}^r(A)$ が誘導される。この作用の固定点の集合は次集合と一対一に対応する。

$$\{\mathbb{C}[x,y] \text{ の monomial ideal で } (x^a, y^b) \text{ を含むもの }\}$$

この集合の元の個数はちょうど $p(r; a, b)$ である。今の場合一般的な 1-パラメター部分群 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \subset \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$ を取っても固定点の集合は変わらない。そして $\mathrm{Hilb}^r(A)^{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}} \subset \mathrm{Hilb}^r(A)$ はうまく locally closed set に分割するとそれぞれで deformation retract になっている。代数多様体の場合、コンパクトサポートを持つコホモロジーで定義したオイラー数と特異コホモロジーで定義したオイラー数は同じなので、

$$\chi(\mathrm{Hilb}^r(A)) = \chi(\mathrm{Hilb}^r(A)^{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}) = p(r; a, b)$$

□

*myohsuke@ms.u-tokyo.ac.jp

変数の個数が3以上の場合も全く同様のことが成立する。

そこで次のような問題を考えることができる。

問題

(1) A を一般の有限代数とするとき、$\mathrm{Hilb}^r(A)$ はどのように振る舞うのか？

(2) $\mathrm{Hilb}^r(A)$ や $\chi(\mathrm{Hilb}^r(A))$ から A のどのような情報は復元されるのか？

2 Gorenstein 環の Hilbert スキーム

先に挙げた例 $A = \mathbb{C}[x, y]/(x^a, y^b)$ の場合、Hilbert スキームには次のような対称性がある。

$$\chi(\mathrm{Hilb}^r(A)) = p(r; a, b) = p(ab - r; a, b) = \chi(\mathrm{Hilb}^{ab-r}(A)).$$

この対称性は、環 $\mathbb{C}[x, y]/(x^a, y^b)$ が Gorenstein であることの表れだと理解することができる。ここで Artin 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ が Gorenstein であるとは $(0 : \mathfrak{m}) = \{x \in A \mid \mathfrak{m} \cdot x = 0\}$ が A 上一元生成ということである。上の事実は次のように一般化される。

Theorem 2.1. *A を k 上の有限局所 Gorenstein 代数とし、$\dim_k A = n$ とする。このときスキームとして*

$$\mathrm{Hilb}^r(A) \simeq \mathrm{Hilb}^{n-r}(A)$$

となる。

Remark 2.2. k-value points での全単射だけであれば、Matlis 双対性 (あるいは local duality) からすぐに従う。

Remark 2.3. A が Gorenstein とは限らない場合は、ω を A の標準加群とすれば片方が Quot スキームになった次の同型が成立する。

$$\mathrm{Hilb}^r(A) \simeq \mathrm{Quot}^{n-r}(\omega).$$

3 Hilbert スキームから復元される情報

$(A, \mathfrak{m})$ を k 上の有限局所代数とし、$\dim_k A = n$ だとする。

Definition 3.1. $(0 : \mathfrak{m})$ を A の *socle* といい $\mathrm{soc}A$ とかく。これは $k = A/\mathfrak{m}$ 上のベクトル空間である。

$\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ を A の埋蔵次元 *(embedded dimension)* といい $\mathrm{emdim}A$ と表す。

これらの量は Hilbert スキームから復元することができる。

Proposition 3.2. *記号は上の通りだとする。次が成立する。*

$$\mathrm{Hilb}^{n-1}(A)_{\mathrm{red}} \simeq \mathbb{P}^{\dim \mathrm{soc}A - 1}$$
$$\mathrm{Hilb}^{2}(A)_{\mathrm{red}} \simeq \mathbb{P}^{\mathrm{emdim}A - 1}$$

特に

$$A \text{ は } \textit{Gorenstein} \iff \dim \mathrm{Hilb}^{n-1}(A) = 0.$$

また $k = \mathbb{C}$ ならば

$$A \text{ は } \textit{Gorenstein} \iff \chi(\mathrm{Hilb}^{n-1}(A)) = 1.$$

Hilbert スキーム $\mathrm{Hilb}^r(A)$ は A のイデアルをパラメトライズしているがイデアルは全て $\mathfrak{m}$ に含まれるので次の閉埋め込みがある。

$$\mathrm{Hilb}^r(A) \to \mathrm{Grass}(\mathfrak{m}, r-1).$$

ここで右辺はベクトル空間 $\mathfrak{m}$ の $r-1$ 次元商の Grassmannian. したがって

$$\dim \mathrm{Hilb}^r(A) \leq (n-r)(r-1)$$

である。もしある $2 \leq r \leq n-1$ で等号が成立したとすると、全ての r で等号が成立してしかも

$$A \simeq k[x_1, \ldots, x_{n-1}]/(x_1, \ldots, x_{n-1})^2$$

となる。基底つき (一つ目の基底は単位元 1) の有限代数のモジュライはコーン (次数つき環のスペック) になっているのだが、この代数はその頂点になっている (基底は $1, x_1, \ldots x_{n-1}$)(c.f.[Po])。

4　代数的族と Hilbert スキーム

一般に準射影多様体の射 $\pi : X \to S$ があるとき、相対 Hilbert スキームと呼ばれる S 上のスキーム $p : \mathrm{Hilb}^r(X/S) \to S$ があり、次の性質を持つ。
任意の点 $s \in S$ に対し

$$p^{-1}(s) \simeq \mathrm{Hilb}^r(\pi^{-1}(s))$$

となる。ここで右辺は s の剰余体上の Hilbert スキームである。

つまり、準射影的多様体の代数的族があると、その Hilbert スキームも代数的族をなすということである。

特定の代数幾何的対象 (例えば射影空間 $\mathbb{P}^n$ の種数を固定した曲線、有限代数のスペックとその座標環の基底のペア) の代数的族の中で普遍的なものがある場合がある。ここである族が普遍的とは、あらゆる族がそれの pull-back で書けるということである。このときその族のパラメター空間をモジュライ空間 (fine moduli space)、その族を普遍族 (universal familiy) という。例えば Hilbert スキーム $\mathrm{Hilb}^r(\mathbb{A}^n)$ はアフィン空間の r 点部分スキームのモジュライ空間になっている。

前節より有限代数の Gorenstein 性はその Hilbert スキームの次元だけから判定できる。有限代数の何らかのモジュライ空間 M があるとき、その普遍族の相対 Hilbert スキームを考えることでよく知られた次の事実の別証を得ることができる。

Proposition 4.1. *M の Gorenstein 環に対応する点全体は M の開集合。*

またオイラー数が代数的族において generic には一定であることより次がわかる。

Proposition 4.2. *$k = \mathbb{C}$ とする。写像*

$$M \to \mathbb{Z}; x \mapsto \chi(\mathrm{Hilb}^r(A_x))$$

は constructible である。ただし、A_x は点 $x \in M$ に対応する有限代数を表す。また、写像が constructible とは、各ファイバーが M の constructible 集合になっているということである。

特に、M が有限形のスキームなら、オイラー数 $\chi(\mathrm{Hilb}^r(A_x))$ のとり得る値は有限個である。

5 Hilbert スキームのオイラー数

再び最初の例 $A = \mathbb{C}[x, y]/(x^a, y^b)$ について考えてみる。$\chi(\mathrm{Hilb}^r(A)) = p(r; a, b)$ であった。列 $(p(r; a, b))_r$ について次のことが知られている [O], [Pr], [Sy], [W]。

Fact 5.1. 列 $(p(r; a, b))_r$ は *unimodal* である。つまりある s があり

$$p(0) \leq p(1) \leq \cdots \leq p(s) \geq p(s+1) \geq \cdots \geq p(ab)$$

となる。

そこで有限代数 A に対しても、この事実がどの程度成立するのかという問題が考えられる。

Theorem 5.2. $A = \mathbb{C}[x, y]/(f, g)$、$f, g$ は $\mathbb{C}[x, y]$ の正則列をなす斉次多項式で $\deg f = 2 \leq n = \deg g$ とする。さらに (f, g) はモノミアルイデアルではないとする。このとき A の同型類は二つでそれぞれオイラー数は次のようになる。

$$\chi(\mathrm{Hilb}^r(A)) = 1 + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \quad 0 \leq r \leq n$$

$$\chi(\mathrm{Hilb}^r(A)) = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ r & 1 \leq r \leq n \end{cases}$$

このときも列 $(\chi(\mathrm{Hilb}^r(A)))_r$ は unimodal になっている。またこの例の場合 A は graded Gorenstein 環である。

$A = \mathbb{C}[x, y]/I$、I はモノミアルイデアル、の形の有限代数の場合は Hilbert スキームのオイラー数は完全に分割数の言葉で書けるのであった。つまり Δ を I に含まれないモノミアル全体のなすヤング図形だとすると、

$$\chi(\mathrm{Hilb}^r(A)) = \#\{r \text{ の分割で } \Delta \text{ に含まれるもの }\} =: p(r; \Delta)$$

となる。次のことが Stanton によって予想されている [St]。

Conjecture 5.3. Δ が *self-conjugate* なヤング図形 *(standard set* あるいは *Ferrers shape)* のとき列 $(p(r; \Delta))_r$ は *unimodal* である。

以上のことから次のことが成り立つのではないかと考えている。

Conjecture 5.4. $(A, \mathfrak{m})$ を $\mathbb{C}$ 上の局所有限代数だとし、$\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = d$ とする。

1. $0 \leq r \leq \dim_{\mathbb{C}} A$ に対し $1 \leq \chi(\mathrm{Hilb}^r(A)) \leq \#\{r \text{ の } d\text{-次元分割 }\}$
2. A が *graded Gorenstein* なら $(\chi(\mathrm{Hilb}^r(A)))_r$ は *unimodal* となる。
3. $d = 2$ で A の $\mathbb{C}[x, y]$ での定義イデアルを $\mathfrak{S}_2$ 不変に取れるとする *(*$\mathfrak{S}_2 \curvearrowright \mathbb{C}[x, y]$ は x, y を入れ替える作用とする*)*。このとき列 $(\chi(\mathrm{Hilb}^r(A)))_r$ は *unimodal* となる。

参考文献

[Be] J. Bertin, *THE PUNCTUAL HILBERT SCHEME: AN INTRODUCTION*, École thématique, Institut Fourier, 2008, pp.99. cel-00437713

[O] K. M. O'Hara, *Unimodality of Gaussian coefficients: a constructive proof*, J. Comb. Theory, Ser. A, Vol. 53, Iss. 1, (Jan. 1990), 29-52

[Po] B. Poonen, *The Moduli Space of Commutative Algebras of Finite Rank*, arXiv:math/0608491v2[math.AG] (2007)

[Pr] R. Proctor, *Solution of two difficult combinatorial problems with linear algebra*, Ame. Math. Monthly, Vol. 89, No. 10 (Dec., 1982), pp. 721-734

[St] D. Stanton, *Unimodality and Young's lattice*, J. Comb. Theory, Ser. A Vol. 54. Iss. 1, (May 1990), 41-53

[Sy] J. J. Sylvester, *Proof of the hitherto undemonstrated fundamental theorem of invariants*, Collected Math. Papers, vol. 3, Chelsea, New York, 1973. pp. 117-126

[W] D. E. White, *Monotonicity and unimodality of the pattern inventory*, Adv. Math., 38 (1980) 101-108