

有限体・局所体上の帯球関数に現れる q -超幾何型選点系直交多項式

川村 晃英*

京都大学大学院理学研究科 数学教室 D2, 2016 年 2 月

動機

関数の反転を与える次の公式が、組み合わせの反転公式の名で知られている：

命題 1 $\{0, 1, \dots, n\}$ 上の関数 f に対して, \widehat{f} を

$$\widehat{f}(s) = \sum_{r=0}^s (-1)^r \binom{s}{r} f(r) \quad (s = 0, 1, \dots, n)$$

で定めると, $\widehat{\widehat{f}} = f$ が成り立つ.

この証明は、計算により楽に行える。しかしその意味はまた別である。このような式の対称性の背後に、何らかの群の作用があるのではないかと問うのは、自然と思われる。

梅田氏の論説 [1] では、森毅氏の問題提起として、『これ（命題 1）を群の表現論とからめて証明できないか』という問題に取り組んでいる。そこではブール代数上の対称群不変関数のフーリエ変換が用いられ、命題 1 は得られなかったものの、それに似た次の反転公式が得られた：

命題 2 $\{0, 1, \dots, n\}$ 上の関数 f に対して, \widehat{f} を

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} K_r(s; 1/2, n) f(r) \quad (s = 0, 1, \dots, n)$$

で定めると, $\widehat{\widehat{f}} = f$ が成り立つ.

ここで $K_r(s; p, n)$ は、Krawtchouk 多項式と呼ばれる選点系直交多項式である（添付資料 (6)）。このように、群不変関数のフーリエ変換から得られる反転公式の核に、ある種の直交多項式が現れるのである。

本稿では、[1] のアプローチを受け継ぎ、まずこの問題へ我々なりの回答を与える（2 節まで）。次に、この問題を群の帯球関数と関連付けて見直し（3 節）、いくつかの例で新しい直交多項式が帯球関数として得られることを述べる（4 節）。本稿に登場する直交多項式の定義などは、添付資料として最後にまとめている。

1 群不変フーリエ変換

ここではできるだけ一般に、群不変関数のフーリエ変換を定義する。すなわち、局所コンパクト・アーベル群 M 上の、コンパクト群 G の作用に不変な関数を考える。実際、動機で述べた問題に対するには有限群の設定で足りるが、発展として局所体上の群を扱う際にこの設定を要する。

M の Haar 測度 μ を取る（有限の場合は数え上げ測度 counting measure）。また、 \widehat{M} を M の双対群、すなわち M からトーラス $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}^\times$ への連続な群準同型の全体とする。ここには開-コン

*koei@math.kyoto-u.ac.jp

コンパクト位相を入れることで局所コンパクト・アーベル群となる。また μ の双対測度と呼ばれる \widehat{M} 上の Haar 測度 $\widehat{\mu}$ が一意に定まり、次の変換が互いに逆変換となる：

定義 1 〈フーリエ変換〉 $\varphi \in L^1(M)$ に対して、 $\mathcal{F}\varphi \in C(\widehat{M})$ (連続関数) が次式で定まる：

$$\mathcal{F}\varphi(\chi) := \int_M \varphi(a) \overline{\chi(a)} d\mu(a) \quad (\chi \in \widehat{M}). \quad (1)$$

定義 2 〈逆フーリエ変換〉 $\xi \in L^1(\widehat{M})$ に対して、 $\bar{\mathcal{F}}\xi \in C(M)$ が次式で定まる：

$$\bar{\mathcal{F}}\xi(a) := \int_{\widehat{M}} \xi(\chi) \chi(a) d\widehat{\mu}(\chi) \quad (a \in M). \quad (2)$$

ここで群作用を考察に加える。コンパクト群 G は M へ連続かつ群自己同型として作用しているとする。このとき G の作用は測度 μ に関して保測となる。また、 G は \widehat{M} に対しても反傾作用で同様に働く。さらにそれぞれの作用は、関数空間 $L^1(M)$, $C(\widehat{M})$ などへの作用に持ち上がる。

ここで重要なのは、 G の作用とフーリエ変換 $\mathcal{F} : L^1(M) \rightarrow C(\widehat{M})$ が可換となることである。よってフーリエ変換は、 G -不変関数の間の変換 $\mathcal{F} : L^1(M)^G \rightarrow C(\widehat{M})^G$ とみなせる。逆フーリエ変換も同様である。このように見た時の式 (1), (2) の変換を、 M 上の G 不変フーリエ変換と呼ぶ。

2 有限体上の群に関する例

ここでは \mathbb{F} を位数 q の有限体とし、これに関する有限群を前節の M , G として取る例を 2 つ述べる。それらはともに、動機であった組み合わせの反転公式 (命題 1) の ‘ q -analogue’ を与え、これによって森氏の問いに対する我々なりの回答とする。

例 1 $M = \mathbb{F}^n$, $G = (\mathbb{F}^\times)^n \rtimes \mathfrak{S}_n$.

上記 G は n 次対称群 \mathfrak{S}_n と、 \mathbb{F} の乗法群の直積 $(\mathbb{F}^\times)^n$ との半直積群である (輪状積 wreath product と呼ばれる)。 G の \mathbb{F}^n への作用は次式で与えられる：

$$(\lambda, \sigma)a = (\lambda_1 x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \lambda_n a_{\sigma^{-1}(n)}), \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n, \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{F}^\times)^n, a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{F}^n.$$

すると、軌道はその元の 0 でない成分の数で特徴づけられる。すなわち $0 \leq r \leq n$ に対し、軌道

$$\mathcal{O}_r = \left\{ a \in \mathbb{F}^n \mid \#\{i \mid a_i \neq 0\} = r \right\}$$

が定まる。一方、指標群 $\widehat{\mathbb{F}^n}$ は直積 $(\widehat{\mathbb{F}})^n$ と自然に同一視した上で、 $0 \leq s \leq n$ に対し、軌道

$$\mathcal{P}_s := \left\{ \chi \in (\widehat{\mathbb{F}})^n \mid \#\{i \mid \chi_i \neq 1\} = s \right\}$$

が定まる。ここで、軌道のパラメータ $s, r \in \{0, 1, \dots, n\}$ を用いて G 不変フーリエ変換を書き下す。すなわち \mathbb{F}^n 上 G 不変関数 φ の軌道 \mathcal{O}_r での値を $f(r)$ と書き、また $\widehat{\mathbb{F}^n}$ 上の G 不変関数となる $\mathcal{F}\varphi$ の軌道 \mathcal{P}_s での値を $\widehat{f}(s)$ と書けば、式 (1) と (2) の反転性が、次の反転公式を与える：

命題 3 $\{0, 1, \dots, n\}$ 上の関数 f に対して、 \widehat{f} を

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{q^n}} \sum_{r=0}^n (q-1)^r \binom{n}{r} K_r(s; \frac{q-1}{q}, n) f(r) \quad (s = 0, 1, \dots, n)$$

で定めると、 $\widehat{\widehat{f}} = f$ が成り立つ。

核には Krawtchouk 多項式が現れており、命題 2 の一般化となっている。

また、これと組み合わせの反転公式 (命題 1) とは次のような関係がある：この式での q が具体的な数であることを一旦忘れ、単なるパラメータとみなした上で、これを 1 に近づける。すると驚くことに、これは組み合わせの反転公式そのものとなる (いわゆる q -analogue となっている)。

例 2 $M = \text{Mat}_{n,m}(\mathbb{F})$, $G = \text{GL}_n(\mathbb{F}) \times \text{GL}_m(\mathbb{F})$ ($n \leq m$).

M は \mathbb{F} 上 n 行 m 列の全行列、 G は一般線形群の直積である。 M への G 作用は両側からの行列の積で与えられ、その軌道は行列のランクで特徴づけられる。この場合、詳細は略すが、核に

Affine q -Krawtchouk 多項式 (添付資料 (8)) を持つ次の反転公式が得られる :

命題 4 $\{0, 1, \dots, n\}$ 上の関数 f に対して, \widehat{f} を

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{q^{n^2}}} \sum_{r=0}^n (-1)^r q^{\binom{r}{2}} (q^m; q^{-1})_r \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q \text{aff} K_r(s, q^{-m}, n; q) f(r) \quad (s = 0, 1, \dots, n)$$

で定めると, $\widehat{\widehat{f}} = f$ が成り立つ.

この式もまた, $q \rightarrow 1$ のとき組み合わせの反転公式 (命題 1) となる.

3 球表現, 帯球関数

前節に見られた Krawtchouk 多項式たちは, 直交多項式系である. その直交性 (添付資料 (7)(9)) は, 命題 3.4 の反転性から直接導けるが, より一般に, 群の球表現の直交性から来ていると見ることもできる. ここでは我々に必要な範囲で, 球表現およびその帯球関数についてまとめる.

定義 3 (球表現) 局所コンパクト群とそのコンパクト部分群の対 (\mathbb{G}, G) について, これが Gelfand 対であるとは, \mathbb{G} の任意の既約ユニタリ表現 V に関してその G 不変部分空間 V^G が高々 1 次元であることを言う. このとき, 特に $\dim V^G = 1$ なるものを, その球表現という.

以下, 我々の設定, すなわち局所コンパクト群 M にコンパクト群 G が作用している状況を考える. $\mathbb{G} = M \rtimes G$ とおくと, (\mathbb{G}, G) は Gelfand 対となる. また, $M \cong \mathbb{G}/G$ は \mathbb{G} の等質空間であるから, \mathbb{G} の $L^2(M)$ における表現が誘導され, ユニタリ表現となる.

このとき, (\mathbb{G}, G) の球表現のあるものは, $L^2(M)$ の部分表現として実現できる. すなわち, $\mathcal{P} \in \Omega := \{\mathcal{P} \subset \widehat{M}, \text{開集合かつ } G \text{ 軌道}\}$ に対し, 球表現 $V_{\mathcal{P}} \subset L^2(M)$ を構成できる. さらに,

定義 4 (帯球関数) $V_{\mathcal{P}}$ に属する G 不変関数 $\omega_{\mathcal{P}} \in (V_{\mathcal{P}})^G$ で, $\omega_{\mathcal{P}}(0) = 1$ をみたすただ一つのもを, \mathcal{P} に関する帯球関数という. 具体的には次式で与えられる:

$$\omega_{\mathcal{P}}(a) = \frac{1}{\widehat{\mu}(\mathcal{P})} \int_{\mathcal{P}} \chi(a) d\widehat{\mu}(\chi) \quad (a \in M). \quad (3)$$

命題 5 球表現どうしは $L^2(M)$ において互いに直交する. 特に, 次が成り立つ:

$$(\omega_{\mathcal{P}}, \omega_{\mathcal{P}'})_{L^2(M)} = \delta_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'} \frac{1}{\widehat{\mu}(\mathcal{P})} \quad (\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \Omega). \quad (4)$$

命題 6 $\varphi \in L^1(M)^G$, $\mathcal{P} \in \Omega$ に対し,

$$\mathcal{F}\varphi(\mathcal{P}) = \int_M \varphi(a) \overline{\omega_{\mathcal{P}}(a)} d\mu(a). \quad (5)$$

すなわち帯球関数は, G 不変フーリエ変換の核関数として現れる. 例えば例 1 に戻ってみれば, 確かに命題 3 における Krawtchouk 多項式が帯球関数に当たっている. そして式 (4) の直交性が, Krawtchouk 多項式の直交性を与えることとなる (例 2 でも同様).

最後に我々の帯球関数の, 調和解析的な側面を参考として述べておく:

命題 7 Ω に属する軌道が \widehat{M} のほとんど至るところを占めている, すなわち $\widehat{\mu}(\widehat{M} \setminus \bigcup_{\mathcal{P} \in \Omega} \mathcal{P}) = 0$ と仮定する. すると, $\{\omega_{\mathcal{P}} \mid \mathcal{P} \in \Omega\}$ は Hilbert 空間 $L^2(M)^G$ の完全正規直交系をなす.

4 非アルキメデスの局所体上の群に関する例

有限体を用いた例 1, 2 では, その帯球関数に Krawtchouk 多項式などの直交多項式が見い出せた. ここでは, それらの自然な一般化となる例を考える.

F を非アルキメデスの局所体, \mathfrak{o} をその整数環, \mathfrak{p} をその極大イデアルとする. F 上の (離散的) 付値を $v: F \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ とする. するとその双対付値 $r: \widehat{F} \rightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{Z}$ が次式で定まる:

$r(\chi) = \max\{v(a) \mid a \in F, \chi(a) \neq 1\}$ (但し $r(1) = -\infty$). また, 剰余体 $\mathbb{F} := \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ は有限体なので, その位数を q とする. 自然数 l に対して, 剰余環 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l$ を考えると, 位数 q^l の有限環となる.

例 3 $M = (\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l)^n$, $G = (\mathfrak{o}^\times)^n \rtimes \mathfrak{S}_n$.

これは例 1 の有限体 \mathbb{F} を有限環 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l$ に取り替えた例である. 作用は例 1 と同様である. $a \in \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l$ に対して付値 $v(a) \in \{0, \dots, l-1\} \cup \{\infty\}$ が定まり, \mathfrak{o}^\times の元の積がこの値を変えないことより, M の G 軌道は次のようになる: $x \in X(l, n) := \left\{ x = (x_s)_{s=1}^l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^l \mid |x| = \sum_{s=1}^l x_s \leq n \right\}$ に対して,

$$\mathcal{O}_x := \{(a_i)_{i=1}^n \in M \mid 1 \leq \forall s \leq l, \#\{i \mid v(a_i) = l-s\} = x_s\}.$$

一方, $\chi \in \widehat{\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l}$ に対してその双対付値 $r(\chi) \in \{-\infty\} \cup \{0, \dots, l-1\}$ が定まり, これを用いて \widehat{M} の G 軌道は次のようになる: $y \in X(l, n)$ に対して,

$$\mathcal{P}_y := \{(\chi_i)_{i=1}^n \in \widehat{M} \mid 1 \leq \forall s \leq l, \#\{i \mid r(\chi_i) = s-1\} = y_s\}.$$

本例における帯球関数は, 多変数 Krawtchouk 多項式 (添付資料 (10)) を用いて, 次のように書ける: 軌道 $\mathcal{P}_y \subset \widehat{M}$ に付随する帯球関数の軌道 $\mathcal{O}_x \subset M$ における値を $\omega_y(x)$ と表すとして,

$$\omega_y(x) = K_y^{(l)}(x; \frac{q-1}{q}, n).$$

例 4 $M = \text{Mat}_{n,m}(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l)$, $G = \text{GL}_n(\mathfrak{o}) \times \text{GL}_m(\mathfrak{o})$ ($n \leq m$).

詳細は略す. 帯球関数は多変数 Affine q -Krawtchouk 多項式 (添付資料 (13)) を用いて表せる:

$$\omega_y(x) = \text{aff} K_y^{(l)}(x; q^{-m}, n; q), \quad x, y \in X(l, n).$$

例 5 $M = F^n$, $G = (\mathfrak{o}^\times)^n \rtimes \mathfrak{S}_n$.

これは例 1 の有限体 \mathbb{F} , 例 3 の有限環 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l$ を局所体 F に取り替えた例である. 作用は例 1, 3 と同様である. M の G 軌道は例 3 同様, 元の成分の付値の配分によって決まるが, 成分に 0 (付値 ∞) を含むような軌道は測度 0 であり, 開軌道でないので考えない (3 節参照). それらを除く軌道は全て開であり, $x \in X(n) := \{(x_s)_{s \in \mathbb{Z}} \mid x_s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sum_{s \in \mathbb{Z}} x_s = n\}$ に対して,

$$\mathcal{O}_x := \{(a_i)_{i=1}^n \in M \mid \forall s \in \mathbb{Z}, \#\{i \mid v(a_i) = -s\} = x_s\}$$

で与えられる. \widehat{M} の開 G 軌道も同様に, $y \in X(n)$ に対して, 次で与えられる:

$$\mathcal{P}_y := \{(\chi_i)_{i=1}^n \in \widehat{M} \mid \forall s \in \mathbb{Z}, \#\{i \mid r(\chi_i) = s\} = y_s\}.$$

帯球関数は, ∞ -変数 Krawtchouk 多項式 (添付資料 (15)) を用いて次のようになる:

$$\omega_y(x) = K_y^{(\infty)}(x; \frac{q-1}{q}, n).$$

例 6 $M = \text{Mat}_{n,m}(F)$, $G = \text{GL}_n(\mathfrak{o}) \times \text{GL}_m(\mathfrak{o})$ ($n \leq m$).

詳細は略す. 帯球関数は ∞ -変数 Affine q -Krawtchouk 多項式 (添付資料 (18)) を用いて表せる:

$$\omega_y(x) = \text{aff} K_y^{(\infty)}(x; q^{-m}, n; q), \quad x, y \in X(n).$$

添付資料: Krawtchouk 多項式たちの定義と直交関係式

ここでは, 本稿に登場する直交多項式の紹介をする. $m \geq 1$ を自然数, $0 < p, q < 1$ をパラメータとする. δ は Kronecker のデルタとする. $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$, $(a; q)_k = (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\cdots(1-aq^{k-1})$ とする (Pochhammer symbol). $X(l, m)$ は例 3 で, $X(m)$ は例 5 でそれぞれ定義したもの. $x \in X(m)$ に対し, $|x^k| = \sum_{i \geq k} x_i$, $\Delta(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} ix_i$, $\binom{m}{x} = \frac{m!}{(m-|x|)! \prod_{i \in \mathbb{Z}} i!}$, $\left[\begin{matrix} m \\ x \end{matrix} \right]_q = \frac{(q^m; q^{-1})_{|x|}}{\prod_{i \in \mathbb{Z}} (q; q)_{x_i}}$.

1. Krawtchouk 多項式 [2]

定義. $K_y(x; p, m) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -x, -y \\ -m \end{matrix} ; \frac{1}{p} \right) = \sum_{k=0}^x \frac{(-x)_k (-y)_k}{(-m)_k k! p^k}, \quad 0 \leq x, y \leq m. \quad (6)$

直交性.
$$\sum_{x=0}^m p^x (1-p)^{m-x} \binom{m}{x} K_y(x; p, m) K_z(x; p, m) = \delta_{y,z} \frac{(1-p)^y}{p^y} \binom{m}{y}^{-1}. \quad (7)$$

2. Affine q -Krawtchouk 多項式 [4]

定義.
$$\text{aff} K_y(x; p, m; q) = 3\varphi_2 \left(\begin{matrix} q^{-x}, q^{-y}, 0 \\ p, q^{-m} \end{matrix}; q, q \right) = \sum_{k=0}^x \frac{(q^{-x}; q)_k (q^{-y}; q)_k}{(q^{-m}; q)_k (p; q)_k (q; q)_k} q^k, \quad 0 \leq x, y \leq m.$$

直交性.
$$\sum_{x=0}^m p^{m-x} (p; q)_x \begin{bmatrix} m \\ x \end{bmatrix}_q \text{aff} K_y(x; p, m; q) \text{aff} K_z(x; p, m; q) = \delta_{y,z} \frac{p^y}{(p; q)_y} \begin{bmatrix} m \\ y \end{bmatrix}_q^{-1}. \quad (9)$$

3. 多変数 Krawtchouk 多項式 [3]

定義.
$$K_y^{(l)}(x; p, m) = \prod_{i=1}^l \frac{(-m_i)_{y_i}}{(-n_i)_{y_i}} K_{y_i}(x_{l+1-i}; p, m_i), \quad x, y \in X(l, m). \quad (10)$$

ここで,
$$m_i = m - |y^{i+1}| - |x^{l+2-i}|, \quad n_i = m - |y^{i+1}|. \quad (11)$$

直交性.
$$\sum_{x \in X(l, m)} p^{|x|} (1-p)^{l m - \Delta(x)} \binom{m}{x} K_y^{(l)}(x; p, m) K_z^{(l)}(x; p, m) = \delta_{y,z} \frac{(1-p)^{\Delta(y)}}{p^{|y|}} \binom{m}{y}^{-1}. \quad (12)$$

4 多変数 Affine q -Krawtchouk 多項式

定義.
$$\text{aff} K_y^{(l)}(x; p, m; q) = \frac{1}{q^{N(x, y)}} \prod_{i=1}^l \frac{(q^{m_i}; q^{-1})_{y_i} (p^{-1} q^{-m+m_i}; q^{-1})_{y_i}}{(q^{n_i}; q^{-1})_{y_i} (p^{-1} q^{-m+n_i}; q^{-1})_{y_i}} \text{aff} K_{y_i}(x_{l+1-i}; p q^{m-m_i}, m_i; q), \quad (13)$$

$x, y \in X(l, m)$. ここで m_i および n_i は式 (11) と同一. また, $N(x, y) = \sum_{i < j} (j - i - 1) x_{l+1-i} y_j$.

直交性.
$$\sum_{x \in X(l, m)} p^{l m - \Delta(x)} (p; q)_{|x|} q^{C(x)} \begin{bmatrix} m \\ x \end{bmatrix}_q \text{aff} K_y^{(l)}(x; p, m; q) \text{aff} K_z^{(l)}(x; p, m; q) = \delta_{y,z} \frac{p^{\Delta(y)}}{(p; q)_{|y|} q^{C(y)}} \begin{bmatrix} m \\ y \end{bmatrix}_q^{-1}. \quad (14)$$

ここで, $C(x) = \sum_{j=1}^l (j-1)(m - |x|) x_j + \sum_{i < j} (j-i-1) x_i x_j$.

5 ∞ -変数 Krawtchouk 多項式

定義.
$$K_y^{(\infty)}(x; p, m) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \frac{(-m_i)_{y_i}}{(-n_i)_{y_i}} K_{y_i}(x_{-i}; p, m_i), \quad x, y \in X(m). \quad (15)$$

ここで,
$$m_i = m - |y^{i+1}| - |x^{-i+1}|, \quad n_i = m - |y^{i+1}|. \quad (16)$$

直交性.
$$\sum_{x \in X(m)} (1-p)^{m - \Delta(x)} \binom{m}{x} K_y^{(\infty)}(x; p, m) K_z^{(\infty)}(x; p, m) = \delta_{y,z} \frac{(1-p)^{2m + \Delta(y)}}{p^{2m}} \binom{m}{y}^{-1}. \quad (17)$$

6 ∞ -変数 Affine q -Krawtchouk 多項式

定義.
$$\text{aff} K_y(x; p, m; q | \infty) = \frac{1}{q^{N(x, y)}} \prod_{i \in \mathbb{Z}} \frac{(q^{m_i}; q^{-1})_{y_i} (p^{-1} q^{-m+m_i}; q^{-1})_{y_i}}{(q^{n_i}; q^{-1})_{y_i} (p^{-1} q^{-m+n_i}; q^{-1})_{y_i}} \text{aff} K_{y_i}(x_{-i}; p q^{m-m_i}, m_i; q), \quad (18)$$

$x, y \in X(m)$. ここで m_i および n_i は式 (16) と同一. また, $N(x, y) = \sum_{i < j} (j - i - 1) x_{-i} y_j$.

直交性.
$$\sum_{x \in X(m)} p^{m - \Delta(x)} q^{C(x)} \begin{bmatrix} m \\ x \end{bmatrix}_q \text{aff} K_y^{(\infty)}(x; p, m; q) \text{aff} K_z^{(\infty)}(x; p, m; q) = \delta_{y,z} \frac{p^{2m + \Delta(y)}}{(p; q)_m^2 q^{C(y)}} \begin{bmatrix} m \\ y \end{bmatrix}_q^{-1}. \quad (19)$$

ここで, $C(x) = \sum_{i < j} (j - i - 1) x_i x_j$.

参考文献

- [1] 梅田亨, 森毅の主題による変奏曲 集合篇 (3), 数学セミナー 2013 年 10 月号, 73-79.
- [2] T.H. Koornwinder, *Krawtchouk Polynomials, a Unification of Two Different Group Theoretic Interpretations*, S.I.A.M. J. Math. Anal., **13** (1982), 1011-1023.
- [3] H. Mizukawa, *Orthogonality Relations for Multivariate Krawtchouk Polynomials*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, SIGMA **7** (2011), 017, 5pages.
- [4] D. Stanton, *A Partially Ordered Set and q -Krawtchouk Polynomials*, J. Comb. Theory, Series A **30** (1981), 276-284.