

2次元定常輸送方程式の解の正則性

川越 大輔*

京都大学大学院情報学研究科, 2016年2月

1 問題設定

Ω を領域 $\mathbb{R} \times (0, 1)$, S^1 を単位円とし, 次の微分積分方程式を考える:

$$-\xi \cdot \nabla I(x, \xi) - (\mu_a + \mu_s)I(x, \xi) + \mu_s \int_{S^1} p(\xi, \xi') I(x, \xi') d\sigma_{\xi'} = 0, \quad (x, \xi) \in \Omega \times S^1. \quad (1)$$

ただし, ∇ は変数 x についての微分演算子, \cdot はベクトル空間 \mathbb{R}^2 の Euclid 内積, $d\sigma$ は S^1 上の線素とする. ここで, μ_a および μ_s は非負の定数, p は $S^1 \times S^1$ 上の正值連続関数であり,

$$\int_{S^1} p(\xi, \xi') d\sigma_{\xi'} = 1$$

を満たすことを仮定する. 本稿では, 方程式 (1) を定常輸送方程式と呼ぶ.

定常輸送方程式 (1) には, 通常次の境界条件が課される. まず, 境界 Γ_- を次のように定義する:

$$\begin{aligned} \Gamma_- &:= \{(x, \xi) | x \in \partial\Omega, \xi \in S^1, n(x) \cdot \xi < 0\} \\ &= \{(x_1, 0, \xi) | x_1 \in \mathbb{R}, 0 < \theta < \pi\} \cup \{(x_1, 1, \xi) | x_1 \in \mathbb{R}, -\pi < \theta < 0\}. \end{aligned}$$

ただし, $n(x)$ は $\partial\Omega$ の点 x における外向き単位法線ベクトルである. そして, I_0 を Γ_- 上の関数として, 次の境界条件を課す:

$$I(x, \xi) = I_0(x, \xi), \quad (x, \xi) \in \Gamma_-. \quad (2)$$

本稿では, 定常輸送方程式の境界値問題 (1) - (2) における古典解の存在と一意性, さらに境界値の滑らかさと解の滑らかさとの関係について述べる. ただし, 本稿でいう古典解 I とは, $I \in C^1(\Omega \times S^1) \cup C((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$ であって, $\Omega \times S^1$ 上で (1) を満たし, Γ_- 上で (2) を満たすものである.

2 記法

本稿では, 関係 $\xi = (\cos \theta, \sin \theta)$ により単位円 S^1 と区間 $(-\pi, \pi]$ を同一視する. また, 集合 X に対して, X 上の C^m 級関数であって, m 階までのすべての偏導関数が X で有界であるもの全体を $B^m(X)$ と書く. ただし, 本稿では変数 x による偏微分のみを考え, 変数 ξ または変数 θ による偏微分は考えないものとする. $x \in \Omega$ を成分ごとに $x = (x_1, x_2)$ と書き, それにともない $I(x, \xi)$ を $I(x_1, x_2, \xi)$ などと書くこともある. また, $B^0(X)$ 上の最大値ノルムを $\|\cdot\|_X$ と表す.

*d.kawagoe@acs.i.kyoto-u.ac.jp

3 主結果

定理 1. $I_0 \in \mathcal{B}^0(\Gamma_-)$, $\frac{\partial I_0}{\partial x_1} \in \mathcal{B}^0(\Gamma_-)$ かつ $\mu_a > 0$ と仮定する. このとき, 境界値問題 (1) - (2) はただ 1 つの古典解 I をもつ.

定理 2. 定理 1 の仮定に加えて, $\frac{\partial^2 I_0}{\partial x_1^2} \in \mathcal{B}^0(\Gamma_-)$ が成り立つとする. このとき, 解 I は $C^2(\Omega \times S^1)$ に属する.

4 解の構成

定常輸送方程式 (1) を特性直線に沿って積分することで, 次の積分方程式が得られる. 当座はこの積分方程式の解を, 境界値問題 (1)-(2) の解と呼ぶことにする.

定義 1. $I \in \mathcal{B}^0((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$ が次の積分方程式を満たすとき, I は定常輸送方程式の境界値問題 (1) - (2) の解であるという.

$x \in [0, 1], \theta \in (0, \pi)$ のとき,

$$I(x, \xi) = \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} x_2\right) I_0(x_1 - x_2 \cot \theta, 0, \xi) + \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_0^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \quad (3)$$

$x \in (0, 1], \theta \in (-\pi, 0)$ のとき,

$$I(x, \xi) = \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - 1)\right) I_0(x_1 - (x_2 - 1) \cot \theta, 1, \xi) + \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_1^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \quad (4)$$

なお, この積分方程式は $\theta = 0$ または π の場合を除いて定義されており, そのため, この解が古典解であることは別途確認が必要であることに注意しておく.

まずは, 解の存在を構成によって示す. $(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-$ 上の関数列 $\{I^{(n)}\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する. $I^{(0)}$ を

- $x \in [0, 1], \theta \in (0, \pi)$ のとき, $I^{(0)}(x, \xi) := \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} x_2\right) I_0(x_1 - x_2 \cot \theta, 0, \xi)$.
- $x \in (0, 1], \theta \in (-\pi, 0)$ のとき, $I^{(0)}(x, \xi) := \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - 1)\right) I_0(x_1 - (x_2 - 1) \cot \theta, 1, \xi)$.
- $x \in (0, 1), \theta \in \{0, \pi\}$ のとき, $I^{(0)}(x, \xi) := 0$.

で定義する. $I^{(n)}$ まで定義できたとして, $I^{(n+1)}$ を

- $x \in [0, 1], \theta \in (0, \pi)$ のとき,
- $$I^{(n+1)}(x, \xi) := \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_0^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^{(n)}(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt.$$
- $x \in (0, 1], \theta \in (-\pi, 0)$ のとき,
- $$I^{(n+1)}(x, \xi) := \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_1^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^{(n)}(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt.$$

- $x \in (0, 1), \theta \in \{0, \pi\}$ のとき,

$$I^{(n+1)}(x, \xi) := \mu_s \int_0^\infty \exp(-(\mu_a + \mu_s)t) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^{(n)}(x_1 - t \cos \theta, x_2, \xi') d\sigma_{\xi'}.$$

で定義する. このとき, 簡単な計算により, 次の命題が成り立つことが分かる.

命題 1. $I_0 \in \mathcal{B}^0(\Gamma_-)$ ならば, すべての $n \geq 0$ に対して, $I^{(n)} \in \mathcal{B}^0((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$ が成り立つ.

この命題を示す際に, 次の補題が得られる.

補題 1. $I^{(n)} \in \mathcal{B}^0((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$ と仮定する. このとき, 次の評価が成り立つ.

$$\|I^{(n+1)}\|_{(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-} \leq \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \|I^{(n)}\|_{(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-}.$$

命題 1 と補題 1 から, $I(x, \xi) := \sum_{n=0}^\infty I^{(n)}(x, \xi)$ が $(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-$ 上絶対一様収束し, $\mathcal{B}^0((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$ に属することが分かる. また, この $I(x, \xi)$ が解となっていることも級数の計算により確認できる. 以上より, 解の存在が示された.

5 解の一意性

次に, 解の一意性を示す. I_1, I_2 を解とし, その差を I とおく. すなわち, $I := I_1 - I_2$. このとき, 解の定義から I は $\mathcal{B}^0((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$ に属し, 次の積分方程式を満たすことが分かる:

$x \in [0, 1), \theta \in (0, \pi)$ のとき,

$$I(x, \xi) = \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_0^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta}(x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \quad (5)$$

$x \in (0, 1], \theta \in (-\pi, 0)$ のとき,

$$I(x, \xi) = \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_1^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta}(x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \quad (6)$$

(5), (6) を評価することで, 不等式 $\|I\|_{(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-} \leq \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \|I\|_{(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-}$ を得る. この不等式からただちに, $I = 0$ すなわち $I_1 = I_2$ がしたがう.

また, 古典解も先に導出した積分方程式を満たすことから, この議論で古典解の一意性も保証される.

6 古典解

$\{I^{(n)}\}_{n \geq 0}$ 自身の議論と同様にして, 各 $\frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_1}(x, \xi)$ が $(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-$ 上有界連続で, $\frac{\partial I}{\partial x_1}(x, \xi) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_1}(x, \xi)$ が $(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-$ 上絶対一様収束し, $\mathcal{B}^0((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$ に属することが分かる. すなわち, 解 I は x_1 について項別微分可能であり, その偏導関数は $(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-$ 上連続である.

一方, $\{I^{(n)}\}_{n \geq 0}$ を変数 x_2 について (形式的に) 微分すると, 次の表示が得られる.

- $x \in [0, 1), \theta \in (0, \pi)$ のとき,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^{(0)}}{\partial x_2}(x, \xi) &= -\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} x_2\right) I_0(x_1 - x_2 \cot \theta, 0, \xi) \\ &\quad - \cot \theta \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} x_2\right) \frac{\partial I_0}{\partial x_1}(x_1 - x_2 \cot \theta, 0, \xi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial x_2}(x, \xi) &= \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^{(n)}(x_1, x_2, \xi') d\sigma_{\xi'} dt \\ &\quad - \frac{\mu_s \cos \theta}{\sin^2 \theta} \int_0^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_1}(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt \\ &\quad - \frac{\mu_s(\mu_a + \mu_s)}{\sin^2 \theta} \int_0^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^{(n)}(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \end{aligned}$$

- $x \in (0, 1], \theta \in (-\pi, 0)$ のとき,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^{(0)}}{\partial x_2}(x, \xi) &= -\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - 1)\right) I_0(x_1 - (x_2 - 1) \cot \theta, 1, \xi) \\ &\quad - \cot \theta \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - 1)\right) \frac{\partial I_0}{\partial x_1}(x_1 - (x_2 - 1) \cot \theta, 0, \xi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial x_2}(x, \xi) &= \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^{(n)}(x_1, x_2, \xi') d\sigma_{\xi'} dt \\ &\quad - \frac{\mu_s \cos \theta}{\sin^2 \theta} \int_1^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_1}(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt \\ &\quad - \frac{\mu_s(\mu_a + \mu_s)}{\sin^2 \theta} \int_1^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^{(n)}(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \end{aligned}$$

- $x \in (0, 1), \theta \in \{0, \pi\}$ のとき, $\frac{\partial I^{(0)}}{\partial x_2}(x, \xi) := 0$.

$$\frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial x_2}(x, \xi) := \mu_s \int_0^\infty \exp(-(\mu_a + \mu_s)t) \int_{S^1} p(\xi, \xi') \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2}(x_1 - t \cos \theta, x_2, \xi') d\sigma_{\xi'}.$$

ここで、各 $\frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2}$ には $\frac{1}{\sin \theta}$ の特異性があるので、先ほどのような $(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-$ 上の最大値評価がただちには成立しない。そこで、以下の準備を通じて、 $\frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2}$ の $\Omega \times S^1$ での連続性を示す。

まず、 $0 < \delta < 1/2$ なる実数 δ を一つとり、それによって定まる帯領域 $\mathbb{R} \times [\delta, 1 - \delta]$ を K と書く。また、先の δ に対して、 $\sum_{n=0}^\infty \delta_n = \delta$ を満たす正数列 $\{\delta_n\}_{n \geq 0}$ をとり、それに対応する帯領域として、 $K_n := \mathbb{R} \times [\sum_{j=0}^n \delta_j, 1 - \sum_{j=0}^n \delta_j]$ をとる。このとき、次の補題が成り立つ。

補題 2. $\frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2}$ が $K_n \times S^1$ 上有界連続ならば、 $\frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial x_2}$ は $K_{n+1} \times S^1$ 上有界連続でかつ次の不等式を満たす。

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial x_2} \right\|_{K_{n+1} \times S^1} &\leq \frac{2\mu_s}{e\delta_{n+1}(\mu_a + \mu_s)} \|I^{(n)}\|_{(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-} \\ &\quad + \frac{\mu_s}{e\delta_{n+1}(\mu_a + \mu_s)^2} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_1} \right\|_{(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-} + \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2} \right\|_{K_n \times S^1}. \end{aligned}$$

$\frac{\partial I^{(0)}}{\partial x_2}$ が $K_0 \times S^1$ 上有界連続で、かつ任意の $n \geq 0$ に対して $K \subset K_n$ が成り立つから、任意の $n \geq 0$ について $\frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2}$ が $K \times S^1$ 上有界連続であることが補題 2 から分かる。また、特に $\tilde{\mu}_a := \frac{\mu_a}{2}$, $\delta_0 := \frac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\mu}_a + \mu_s} \delta$, $\delta_{n+1} := \frac{\mu_s}{\tilde{\mu}_a + \mu_s} \delta_n$ ととれば、次の評価が成り立つことが分かる。

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial I}{\partial x_2} \right\|_{K \times S^1} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2} \right\|_{K_n \times S^1} \\ &\leq \left\| \frac{\partial I^{(0)}}{\partial x_2} \right\|_{K_0 \times S^1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \right)^n + \frac{2(\tilde{\mu}_a + \mu_s)}{e\delta_0\tilde{\mu}_a} \|I_0\|_{\Gamma_-} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\mu}_a + \mu_s}{\mu_a + \mu_s} \right)^n \\ &\quad + \frac{(\tilde{\mu}_a + \mu_s)}{e\delta_0\tilde{\mu}_a(\mu_a + \mu_s)} \left\| \frac{\partial I_0}{\partial x_1} \right\|_{\Gamma_-} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\mu}_a + \mu_s}{\mu_a + \mu_s} \right)^n. \end{aligned}$$

右辺は有限確定するから、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2}(x, \xi)$ は $K \times S^1$ 上絶対一様収束する。 δ のとり方は任意であったから、解 I は x_2 について項別微分可能で、その偏導関数は $\Omega \times S^1$ 上連続であることが証明された。

以上の議論から、 $I \in C^1(\Omega \times S^1)$ 、すなわち、 I が古典解になっていることが分かる。

7 高階微分可能性

定理 2 については、補題 2 に対応して、次の補題が成り立つ。

補題 3. $\frac{\partial^2 I^{(n)}}{\partial x_2^2}$ が $K_n \times S^1$ 上有界連続ならば、 $\frac{\partial^2 I^{(n+1)}}{\partial x_2^2}$ は $K_{n+1} \times S^1$ 上有界連続でかつ次の不等式を満たす。

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 I^{(n+1)}}{\partial x_2^2} \right\|_{K_{n+1} \times S^1} &\leq \frac{8\mu_s}{e^2\delta_{n+1}^2(\mu_a + \mu_s)} \|I^{(n)}\|_{(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-} + \frac{16\mu_s}{e^2\delta_{n+1}^2(\mu_a + \mu_s)^2} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_1} \right\|_{(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-} \\ &\quad + \frac{\mu_s}{e\delta_{n+1}(\mu_a + \mu_s)} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2} \right\|_{K_n \times S^1} + \frac{4\mu_s}{e^2\delta_{n+1}^2(\mu_a + \mu_s)} \left\| \frac{\partial^2 I^{(n)}}{\partial x_1^2} \right\|_{(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-} \\ &\quad + \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \left\| \frac{\partial^2 I^{(n)}}{\partial x_2^2} \right\|_{K_n \times S^1}. \end{aligned}$$

特に $\tilde{\mu}_a := \frac{\mu_a}{2}$, $\delta_0 := \left(1 - \left(\frac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\mu}_a + \mu_s}\right)^{1/2}\right) \delta$, $\delta_{n+1} := \left(\frac{\mu_s}{\tilde{\mu}_a + \mu_s}\right)^{1/2} \delta_n$ ととれば、古典解のときと同様に解 I が x_2 について 2 回項別微分可能であり、その偏導関数が連続であることが分かる。他の偏導関数についても存在と連続性が示されるから、 $I \in C^2(\Omega \times S^1)$ であることが確認できる。

参考文献

- [A] D. S. Anikonov, A. E. Kovtanyuk, and I. V. Prokhorov, *Transport Equation and Tomography*, VSP, The Netherlands, (2002).