複素三次体の一般 Greenberg 予想について

片岡 武典 *

東京大学数理科学研究科，2016 年 2 月

1 岩澤理論の概観

本講演のタイトルにある一般 Greenberg 予想は，数論の中でも岩澤理論という分野に属する未解決問題である．まずは岩澤理論の基本事項を概観しよう (詳細は教科書 [Wa] を参照).

k を代数体，すなわち有理数体の有限次拡大とする．このとき k のイデアル類群 $\mathrm{Cl}(k)$ という重要な有限アーベル群があり，その構造は数論における古典的な研究対象である．p を固定された素数とし，イデアル類群 $\mathrm{Cl}(k)$ そのものではなく，その p-Sylow 部分群 $A(k)$ を考える．大域類体論によれば，$L(k)$ を k の最大不分岐アーベル副 p 拡大 (すなわち Hilbert p-類体) とするとき，Artin 写像による自然な同型

$$A(k) \simeq \mathrm{Gal}(L(k)/k)$$

がある．すなわち $X(k) = \mathrm{Gal}(L(k)/k)$ とおけば $A(k) \simeq X(k)$ である．

岩澤は代数体 k が規則的に動くときに $X(k)$ の振る舞いを考察した．一般に K/k をガロア拡大とする．特に岩澤が考察したのは K/k が $\mathbb{Z}_p$ 拡大，すなわちガロア群が p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ の位相加法群と同型である場合である．例えば各代数体 k は，その円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大と呼ばれる $\mathbb{Z}_p$ 拡大 k^{cyc} を持っており，実際この円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大が岩澤理論的に最も興味深い．

とにかく K/k をガロア拡大としたとき，先ほどと同様に $L(K)$ を K の最大不分岐アーベル副 p 拡大とし，$X(K)$ をそのガロア群 $\mathrm{Gal}(L(K)/K)$ とおく．すると自然な作用

$$\mathrm{Gal}(K/k) \curvearrowright X(K)$$

が，$\gamma \cdot x = \tilde{\gamma} x \tilde{\gamma}^{-1}$ によって定まる．ここに $\tilde{\gamma}$ は γ の $\mathrm{Gal}(L(K)/k)$ への任意の持ち上げである．さらに $X(K)$ が副 p 群であることから，この作用は完備群環の作用

$$\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K/k)]] \curvearrowright X(K)$$

に延長される．このときガロア降下の発想により，

> $X(K)$ の $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K/k)]]$ 加群としての構造は，K/k の中間にある代数体 k' たちの $X(k')$ をコントロールする

と期待される．

実際に，K/k が $\mathbb{Z}_p$ 拡大であるときには，$X(K)$ が $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K/k)]]$ 上の有限生成ねじれ加群であることが示され，その帰結として次の定理が得られる．

---

*tkataoka@ms.u-tokyo.ac.jp

定理 1.1 (岩澤類数公式)．K/k を $\mathbb{Z}_p$ 拡大とするとき，$X(K)$ の構造から定まるある非負整数 λ, μ，及びある整数 ν が存在して，十分大きい n について

$$\sharp X(k_n) = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}$$

となる．ここに k_n は K/k の中間体であって k 上の拡大次数が p^n である (唯一の) ものを表す．

岩澤理論では $X(K)$ の $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K/k)]]$ 加群としての構造を研究する．特にその構造が p 進 L 関数という解析的対象と結びつくというのがいわゆる岩澤主予想であるが，本稿では専ら $X(K)$ の代数的側面を扱う．

2　一般 Greenberg 予想

Greenberg は，与えられた代数体 k の様々な $\mathbb{Z}_p$ 拡大を同時に扱うため，それら全ての合成体 $\tilde{k}$ を導入した．その体 $\tilde{k}$ の大きさは大域類体論によりおおよそ分かり，Leopoldt 予想 [1] の下で，

$$\mathrm{Gal}(\tilde{k}/k) \simeq \mathbb{Z}_p^{1+r_2(k)}$$

となる．ここに $r_2(k)$ は k の複素素点の数である．例えば k が総実体である場合，Leopoldt 予想の下で，k の $\mathbb{Z}_p$ 拡大はただ一つ k^{cyc} のみである．

$\tilde{k}/k$ のように，ある整数 d によってガロア群が $\mathbb{Z}_p^d$ と同型なガロア拡大 K/k を一般に多重 $\mathbb{Z}_p$ 拡大という．このとき Greenberg は一般に $X(K)$ が $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K/k)]]$ 上の有限生成ねじれ加群であることを示した [Gr1] [2]．その帰結として Cuoco-Monsky は定理 1.1 の多重版を示している [CuMo]．さらに Greenberg は $K = \tilde{k}$ に関して次の予想を立てた (一般 Greenberg 予想, Greenberg's generalized conjecture, GGC)．

予想 2.1 ([Gr3])．$X(\tilde{k})$ は完備群環 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\tilde{k}/k)]]$ 上の擬零加群であろう．

ここに擬零とは有限生成かつ零化イデアルの高さが 2 以上であることを意味し，大雑把に言えばとても小さいということである．

いくつかの注意を述べる．

(1) 一般と名の付くからには一般ではないものもあるわけで，それは次の予想である (Greenberg 予想, Greenberg's conjecture, GC)．

予想 2.2 ([Gr2])．k が総実体のとき，$X(k^{\mathrm{cyc}})$ は位数有限であろう．

Leopoldt 予想の下で，総実体についての GGC は GC と同値である．

(2) GGC および GC には，理論的な根拠が無く，あくまでこれまでに反例が見つかっていないというだけのようである．$k = \mathbb{Q}$ の場合に GC(=GGC) が成り立つことは簡単に分かるが，k が実二次体の場合の GC(=GGC) や虚二次体の場合の GGC の時点で既に未知である．実二次体の GC は，成立する実例が多く得られているようである．虚二次体の GGC に関する先行研究は次節で述べる．

---

[1] Leopoldt 予想は大域的な元たちの p 進的な独立性に関する予想であり，$k/\mathbb{Q}$ がアーベル拡大である場合には成立することが知られている．本稿では Leopoldt 予想が成立すると知られている場合あるいは仮定する場合しか扱わない．

[2] 正確には [Gr1] において主張されているのは $K = \tilde{k}$ の場合のみであるが，証明を少し修正することで一般の場合にも通用する．

(3) GGC が謎に包まれているという話をする．GGC は $X(\tilde{k})$ が擬零であるという主張だったが，実は次の問題すらも解決されていないようである．

問題 2.3. k^{cyc} を含む k の $\mathbb{Z}_p^d$ 拡大 K $(d \geq 2)$ であって，$X(K)$ が $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K/k)]]$ 加群として擬零でないものはあるだろうか．

なお K が k^{cyc} を含まない場合や $d = 1$(すなわち $K = k^{\mathrm{cyc}}$) の場合には，$X(K)$ が擬零でないものは比較的容易に構成できる [3]．また K/k が非可換も許す拡大とするときに類似の主張には反例があることが示されている [HaSh].

(4) GGC がわかると何が嬉しいかという話をする．知られていた帰結としては，既に触れた Cuoco-Monsky の定理 (岩澤類数公式の多重版) における不変量の情報が得られる．また手前味噌ながら筆者の結果を雰囲気だけ紹介しておく．

定理 2.4 ([Ka2]). 代数体 k について GGC が成立すると仮定すると，いくつかの緩い仮定のもとで，k の多くの $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K に付随する岩澤 λ, μ 不変量はとても小さい．

3 主定理と計算結果

まず先行研究を紹介する．以下の場合に GGC の十分条件が与えられている．

- 虚二次体 (Minardi [Mi]).
- 虚アーベル四次体で，p が完全分解 (伊藤 [It]).
- CM 体で，p が完全分解 (藤井 [Fu]).
- $\mathbb{Q}(\mu_p)$ (Sharifi [Sh]).

藤井の結果は伊藤の結果の完全な一般化を与えている．また $\mathbb{Q}(\mu_p)$ において p は完全分岐であることから，Sharifi の結果は他 3 つとはかなり毛色が異なる．

本講演での主定理は，Minardi，伊藤，藤井の流れを汲み，k が複素三次体の場合に GGC の十分条件を与えるものである．その主張は次の通り．

定理 3.1 ([Ka1]). k を複素三次体，すなわち $[k : \mathbb{Q}] = 3$ かつ複素素点をもつものとする．次の仮定の下で k についての GGC は成り立つ．

(a) p は $\tilde{k}/\mathbb{Q}$ において有限分解である．

(b) $A(k) = 0$，すなわち p は k の類数を割らない．

(c) p が $k/\mathbb{Q}$ において完全分解しているならば，ε を k の基本単数 [4] としたとき，

$$\begin{cases} p^2 \nmid (\varepsilon^{p-1} - 1) & (p \geq 3) \\ 16 \nmid (\varepsilon^2 - 1) & (p = 2) \end{cases}$$

注意. 条件 (a) は常に成立すると筆者は予想しているが，その証明は難しそうである．実際それは Leopoldt 予想と同じく大域的な元の p 進独立性と同値である．また他の条件 $(b), (c)$ はもっと緩くできるが，記述が長くなるので省略する．

[3] 前者については [Cu]，後者については例えば [HaSh] を参照．

[4] k の単数群は $\mathbb{Z}$ 上階数 1 であるから，基本単数の概念がある．

例 3.2. k を判別式の絶対値が 10,000 以下の複素三次体全てを走らせる．そのような体は 1,520 個ある (データベース LMFDB からリストを得た)．また素数 p は 1,000 以下を走らせる (168 個)．こうして得られる $1{,}520 \times 168 = 255{,}360$ 組のうち，165 組を除いては緩められた条件 $(a), (b), (c)$ を満たすことが確かめられる (この計算は計算パッケージ PARI/GP を用いて行った)．もちろん (a) はこの範囲全てで成立した．

4 主定理の証明の概略

細かな技術を除いて大雑把に言うと，主定理 3.1 の証明は k が虚二次体の場合の [Mi] の手法によって為される．というのも k が複素三次体のとき，Leopoldt 予想が自明な理由で成立するため，$\tilde{k}/k$ は $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大となり，k が虚二次体のときにも $\tilde{k}/k$ は $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大であるから，状況が似通っているのである．

条件 (c) から示唆されるように，p が k において完全分解する場合が最も難しいので，以降その場合のみ考える．一般に k の素点の有限集合 S に対し，$M_S(k)$ によって k の最大 S 外不分岐アーベル副 p 拡大を表すことにする．すると条件 $(b), (c)$ により，p の上のある 2 つの素点 $\mathfrak{p}_i (i = 1, 2)$ について $M_{\{\mathfrak{p}_i\}}(k) = k$ がわかる．K を k の $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\}$ 外不分岐な唯一の $\mathbb{Z}_p$ 拡大とする．

定理の証明は，まず $X(K) = 0$ を示し，それを用いて $X(\tilde{k}) \sim 0$ を示すという流れで行われる [5]．

$X(K) = 0$ の証明

中山の補題により $X(K)_{\mathrm{Gal}(K/k)} = 0$ ならば $X(K) = 0$ であることに注目する．ガロア群の作用が内部自己同型で定まっていたことから，$\mathcal{L}$ を k の $L(K)$ 内の最大アーベル拡大とすると $X(K)_{\mathrm{Gal}(K/k)} = \mathrm{Gal}(\mathcal{L}/K)$ となることがわかる．そこで $\mathcal{L} = K$ を示せばよい．$\mathfrak{p}_2$ の $\mathcal{L}/k$ での惰性体は $M_{\{\mathfrak{p}_1\}}(k)$ に入っているから，仮定 $M_{\{\mathfrak{p}_1\}}(k) = k$ と合わせて，$\mathfrak{p}_2$ は $\mathcal{L}/k$ において完全分岐しているはずである．一方 $\mathcal{L}/K$ は不分岐だから，期待通り $\mathcal{L} = K$ を得る．

$X(\tilde{k}) \sim 0$ の証明

証明の方針は先ほどと似ている．まず単なる加群の議論により，$X(\tilde{k})_{\mathrm{Gal}(\tilde{k}/K)}$ が位数有限ならば $X(\tilde{k}) \sim 0$ であることがわかる．そして $\mathcal{L}$ を K の $L(\tilde{k})$ 内の最大アーベル拡大とすると $X(\tilde{k})_{\mathrm{Gal}(\tilde{k}/K)} = \mathrm{Gal}(\mathcal{L}/\tilde{k})$ となる．そこで $\mathcal{L}/\tilde{k}$ が有限拡大であることを示せばよい．

仮定 (a) により，K/k の中間代数体 k' であって，p の上の任意の素点が K/k' で不分解であるようなものが取れる．このとき $\mathcal{L}/k'$ がアーベル拡大であることが次のようにして示される．

- $\mathrm{Gal}(K/k')$ の $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}/K)$ への (内部自己同型による) 作用が自明であることを示せばよい．
- $X(K) = 0$ であったから，$\mathrm{Gal}(\mathcal{L}/K)$ は p の上の素点の惰性群で生成されている．
- それらの惰性群は $\mathrm{Gal}(K/k')$ の作用により安定である．
- $\mathcal{L}/\tilde{k}$ は不分岐であるから，それらの惰性群は自然に $\mathrm{Gal}(\tilde{k}/K)$ に単射に入る．
- $\tilde{k}/k'$ はアーベルなので $\mathrm{Gal}(K/k')$ の $\mathrm{Gal}(\tilde{k}/K)$ への作用は自明である．

さて $\mathcal{L}/k'$ がアーベル拡大であることがわかった．$i = 1, 2$ に対して仮定 $M_{\{\mathfrak{p}_{3-i}\}}(k) = k$ により $\mathfrak{p}_i$ は K/k において完全分岐しているから，$\mathfrak{p}'_i$ を $\mathfrak{p}_i$ の上にある k' の唯一の素点とする．このとき $\mathcal{L}/\tilde{k}$ は不分岐なので $\mathfrak{p}'_i$ の $\mathcal{L}/k'$ における惰性群 $I_{\mathfrak{p}'_i}$ は自然に $\tilde{k}/k'$ における惰性群と同型であり，そ

[5] 条件 $(b), (c)$ を緩めた場合，$X(K) = 0$ とは限らず，より込み入った証明を必要とする．

の $\mathbb{Z}_p$-rank は 1 である．故に $I_{\mathfrak{p}'_1}+I_{\mathfrak{p}'_2}$ の $\mathbb{Z}_p$-rank はたかだか 2 である．一方 $\mathcal{L}$ の $I_{\mathfrak{p}'_1}+I_{\mathfrak{p}'_2}$ による固定体は $M_{\{\mathfrak{p}_3\}}(k')$ に含まれているが，実は $M_{\{\mathfrak{p}_3\}}(k')/k'$ の有限拡大であることがわかる (アーベル体についての Leopoldt 予想の証明の議論を用いる)．以上により $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}/k')$ の $\mathbb{Z}_p$-rank は 2 であり，これは $\mathcal{L}/\tilde{k}$ が有限拡大であることを意味している．これで主定理 3.1 の証明が終わった．

参考文献

[Cu] A. Cuoco, *Generalized Iwasawa invariants in a family*, Compositio Math., 51 (1), 89–103, 1984.

[CuMo] A. Cuoco and P. Monsky, *Class numbers in $\mathbb{Z}_p^d$-extensions*, Math. Ann., 255 (2), 235–258, 1981.

[Fu] S. Fujii, *On Greenberg's generalized conjecture for CM-fields*, to appear in *J. reine angew. Math.*

[Gr1] R. Greenberg, *The Iwasawa invariants of $\mathbf{\Gamma}$-extensions of a fixed number field*, Amer. J. Math., 95, 204–214, 1973.

[Gr2] R. Greenberg, *On the Iwasawa invariants of totally real number fields*, Amer. J. Math., 98 (1), 263–284, 1976.

[Gr3] R. Greenberg, Iwasawa theory—past and present, In *Class field theory—its centenary and prospect (Tokyo, 1998)*, volume 30 of *Adv. Stud. Pure Math.*, 335–385, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.

[HaSh] Y. Hachimori and R. T. Sharifi, *On the failure of pseudo-nullity of Iwasawa modules*, J. Algebraic Geom., 14 (3), 567–591, 2005.

[It] T. Itoh, *On multiple $\mathbb{Z}_p$-extensions of imaginary abelian quartic fields*, J. Number Theory, 131 (1), 59–66, 2011.

[Ka1] T. Kataoka, *On Greenberg's generalized conjecture for complex cubic fields*, preprint.

[Ka2] T. Kataoka, *A consequence of Greenberg's generalized conjecture on Iwasawa invariants of $\mathbb{Z}_p$-extensions*, arXiv:1602.07916.

[Mi] J. V. Minardi, *Iwasawa modules for $\mathbb{Z}_p^d$-extensions of algebraic number fields*, Thesis (Ph.D.)–University of Washington, 1986.

[Sh] R. T. Sharifi, On Galois groups of unramified pro-p extensions, Math. Ann., 342 (2), 297–308, 2008.

[Wa] L. C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, volume 83 of Graduate Texts in Mathematics, second edition, Springer-Verlag, New York, 1997.