Cabling formuae of quandle cocycle invariants for surface knots

石川 勝巳 *

京都大学 数理解析研究所 M2，2016 年 2 月

1　イントロダクション

4 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^4$ に滑らかに埋め込まれた連結閉曲面のことを**曲面結び目**という。曲面結び目 F を m 重化し、その一部を捩ることによってできる（連結とは限らない）曲面のことを**ケーブル化**といい、$F^{(m,\nu)}$ と表すことにする（後述のように、ν は曲面の捩り方を表すパラメーターである）。一般に、与えられた（曲面）結び目の不変量の $F^{(m,\nu)}$ に対する値を元の（曲面）結び目 F に対する不変量を用いて表した公式を**ケーブル化公式**という。不変量の研究をしている立場としては、公式によって求められる値そのもの以上に、そこにどのような情報が含まれているのかという点に興味がある。実際、1 次元結び目に対する Jones 多項式の場合 [M] のように、ケーブル化公式には、元の不変量が持たない情報が含まれることがあるのである。さて、曲面結び目に対する有効な不変量として**カンドルコサイクル不変量** (QCI)[CJKLS] というものが知られているが、これに対するケーブル化公式は知られていない。[N]（もしくは昨年の成瀬さんの報告集を参照のこと）ではケーブル化の特殊な場合である多重化を考え、QCI の多重化公式はラックコサイクル不変量 (RCI) によって表されることが示されたが、ここで出てきた RCI は QCI で表されることも示された。すなわち、ここにどのような情報が含まれるか、という疑問は本質的には解決されなかった。

そこで本稿では、QCI のケーブル化公式について得られた結果を紹介する。具体的な公式を紹介するとともに、特に、先の疑問に対する一定の解答を与えたい。

2　定義

2.1　ケーブル化

F を曲面結び目、すなわち $\mathbb{R}^4$ に滑らかに埋め込まれた連結閉曲面とする。本稿全体を通して、曲面結び目は全て向き付けられているとする。$F \subset \mathbb{R}^4$ の管状近傍 N をとり、その境界 ∂N を単位法束 (normal sphere bundle) と同一視する。これは自明な S^1 束であることが知られており、その切断 s を枠 (frame) と呼ぶ。s が誘導する準同型 $H_1(F) \to H_1(\mathbb{R}^4 \backslash F)$ が零写像であるようなものが一意的に存在するが、このような枠のことを **0-枠**と呼ぶ。

*katsumi@kurims.kyoto-u.ac.jp

$\partial N(F)$ に埋め込まれた曲面絡み目 $\tilde{F}$ であって、射影 $\tilde{F} \to F$ が m 重被覆写像となっているものを考える。このとき、この被覆に関するモノドロミー表現 $\pi_1(F) \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ が得られるが、これを $\nu \in H^1(F;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(F),\mathbb{Z})$ へ拡張する。但し、$\nu = 0$ の場合が、$\tilde{F}$ が 0-枠に沿った m 重化に対応するように定めるものとする。このようにして F のケーブル化に対して F の 1 次のコホモロジー $\nu \in H^1(F;\mathbb{Z})$ が定まるが、この対応は $\partial N(F)$ の中のイソトピーで移りあうケーブル化を同一視することにより 1 対 1 であることがわかる。そこで $\tilde{F}$ のことを (m,ν)-**ケーブル化**と呼び、$F^{(m,\nu)}$ と書く。

2.2 カンドルとコサイクル不変量

カンドルとは集合 X とその上に定義された二項演算 $*$ の組 $(X,*)$ であって、次の条件 (Q1)〜(Q3) を満たすもののことである：

(Q1) 任意の $x \in X$ に対し、$x * x = x$.

(Q2) 任意の y に対し、写像 $\cdot * y : X \ni x \mapsto x * y \in X$ は全単射。

(Q3) 任意の $x, y, z \in X$ に対し、$(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

たとえば群 G、もしくはその共役類に対し、共役を用いて $g * h := h^{-1}gh$ と演算を定めたものはカンドルになる。すなわち、カンドルとは群から共役をとるという操作が持つ性質を抜き出してくることにより得られる代数である、という言い方もできる。位数 $2k$ の二面体群の、反転を表す元からなる共役類は**二面体カンドル** R_k を定め、4 次交代群の、4 元からなる共役類は**四面体カンドル** Q_4 を定める。また、（曲面）結び目 F の補空間の基本群の類似として、**基本カンドル (fundamental quandle)** $Q(F)$ が定まる。（有限）カンドル X に対し、カンドル準同型（X-彩色と呼ばれる）$\mathcal{C} : Q(F) \to X$ の数は曲面結び目 F に対する不変量であり、大体、補空間の基本群から有限群への表現の数を数えているようなものだと思ってもらって構わない。

群の場合の類似でカンドル X に対し分類空間 $\mathcal{B}^Q X$ が定まる。アーベル群 A に対し $H^*_Q(X;A) := H^*(\mathcal{B}X;A)$ は**カンドルコホモロジー**と呼ばれる。曲面結び目 F に対しダイアグラムを考えることにより連続写像 $S^3 \to \mathcal{B}^Q Q(F)$ が定まる。そこで、有限カンドル X による各彩色 $\mathcal{C}$ について合成

$$f_{\mathcal{C}} : S^3 \to \mathcal{B}^Q Q(F) \xrightarrow{\mathcal{B}^Q \mathcal{C}} \mathcal{B}^Q X$$

を考える。与えられた X のカンドル 3-コサイクル ψ に対し

$$\Psi_\psi(F) := \sum_{\mathcal{C}:X-\mathrm{col.}} \langle f^*_{\mathcal{C}}\psi, [S^3] \rangle \in \mathbb{Z}[A]$$

は曲面結び目の不変量となる（[CJKLS]）。ここで和は全ての X-彩色に亘ってとるものとする。Ψ_ψ は**カンドル (3-) コサイクル不変量** (以後、3-CI と書く）と呼ばれている。

上で述べたような通常考えられる分類空間とは別の分類空間を考え、ここでは $\mathcal{B}^{Q'} X$ と表すことにする。これは通常 $\mathcal{B}^Q_X X$ と書かれるものにさらにセルを貼り付けてえられるもので、[E] に出てくるものに近い。コホモロジー群について、$H^n_Q(X;A) \cong H^{n-1}(\mathcal{B}^{Q'} X;A)$ $(n \geq 1)$ が成立し、また、X-彩色 $\mathcal{C}$ に対し、連続写像 $F \to \mathcal{B}^{Q'} Q(F)$ が定まる。先と同様に合成

$$g_{\mathcal{C}} : F \to \mathcal{B}^{Q'} Q(F) \xrightarrow{\mathcal{B}^{Q'} \mathcal{C}} \mathcal{B}^{Q'} X$$

を考える。与えられた X のカンドル 2-コサイクル ϕ（紛らわしいが、これは $\mathcal{B}^{Q'}X$ の 1-コサイクルである）に対し

$$\Phi_\phi(F) := \sum_{\mathcal{C}:X-\mathrm{col.}} g_{\mathcal{C}}^* \phi \in \mathbb{Z}[H^1(F;A)]$$

は**カンドル 2-コサイクル不変量** (以下、2-CI) と呼ばれる曲面結び目の不変量である (もともと [CSS] で定義されていたものを、[I] や講演ではこのようにコホモロジーの形に再定式化して用いた)。今述べたような 2-CI の構成はまだ論文等になっていないかもしれないが、ここでは詳細は割愛させていただく。なお、同様にカンドル 3-コサイクル ($\mathcal{B}^{Q'}X$ の 2-コサイクル) を引き戻して定義した不変量は、上で述べた 3-CI と同じものになっていることに注意しておく。

3　ケーブル化公式

この節では、ケーブル化の 3-CI について得られた結果を紹介する。この節を通して、F を曲面結び目、$F^{(m,\nu)}$ をその (m,ν)-ケーブル化とする。また n を、$\nu(H_1(F)) = n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ を満たす非負整数とする。

一般に、$\mathbb{Z}[T^{\pm}]$-加群 X に対し、二項演算 $*$ を

$$x * y = Tx + (1-T)y$$

と定めたものはカンドルになるが、このようなものを **Alexander カンドル**という。R_k, Q_4 はいずれも Alexander カンドルの例である。一般に Alexander カンドルについて次の結果を得た：

定理 3.1. X を有限 Alexander カンドルとし、ψ をその 3-コサイクルとする。このとき連結 Alexander カンドルの有限族 $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 及び X_m の 2-コサイクルの有限族 $\{\phi_{m,i}\}_i$ と 3-コサイクルの有限族 $\{\psi_{m,j}\}_j$ があり、定数 $c_{m,n,i,j} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ により、$\Psi_\psi(F^{(m,\nu)})$ は次のように表される：

$$\begin{aligned}\Psi_\psi(F^{(m,\nu)}) &= \sum_{i,j} c_{m,n,i,j}(((\nu/n) \cup \Phi_{\phi_{m,i}}) \cdot \Psi_{\psi_{m,j}})(F) \\ &= \sum_{i,j} c_{m,n,i,j} \sum_{\mathcal{C}:\, X_m-\text{彩色}} ((\nu/n) \cup \Phi_{\phi_{m,i}}(D,\mathcal{C})) \cdot \Psi_{\psi_{m,j}}(D,\mathcal{C}).\end{aligned}$$

ここで、分類空間 $\mathcal{B}^{Q'}X$ が連結であるようなカンドル X を**連結**であるとしている。定理 3.1 は、Alexander カンドルについてケーブル化公式は有限個の 3-CI 及び 2-CI を用いて書かれるということを示している。すなわち、ケーブル化の 3-CI には、（もとと同じかそれより簡単なカンドルについての）3-CI と 2-CI の情報が含まれる、ということである。さらに具体的なカンドルについては次のような明示的な結果を得た：

定理 3.2. k を奇数とする。位数 k の二面体カンドル R_k の任意のカンドル *3*-コサイクル ψ について、次が成り立つ：

$$\Psi_\psi(F^{(m,\nu)}) = \begin{cases} \Psi_{m\psi}(F) & (m,n\ \text{がともに奇数のとき}), \\ k^{(m,n)-1}\left(\dfrac{m}{(m,n)}, k\right)\Psi_{m\psi}(F) & (m\ \text{が奇数、}n\ \text{が偶数のとき}), \\ k^{(m,n)}\left(\dfrac{n}{(m,n)}, k\right) & (m\ \text{が偶数、}n\ \text{が奇数のとき}), \\ k^{(m,n)-1}\left(\dfrac{mn}{(m,n)^2}, k\right) & (m,n\ \text{がともに偶数のとき}). \end{cases}$$

定理 3.3. 四面体カンドル Q_4 の任意の位数 2 のカンドル 3-コサイクル ψ に対して、

$$\Psi_\psi(F^{(m,\nu)}) = \begin{cases} \Psi_{m\psi}(F) & (m, n \notin 3\mathbb{Z} \text{ のとき}), \\ 4^{(m,n)-1}\left(\dfrac{m}{(m,n)}, 2\right)^2 \Psi_{m\psi}(F) & (m \notin 3\mathbb{Z},\ n \in 3\mathbb{Z} \text{ のとき}), \\ 4^{(m,n)}\left(\dfrac{n}{(m,n)}, 2\right)^2 & (m \in 3\mathbb{Z},\ n \notin 3\mathbb{Z} \text{ のとき}), \\ 4^{(m,n)-1}\left(\dfrac{mn}{(m,n)^2}, 2\right)^2 & (m, n \in 3\mathbb{Z} \text{ のとき}). \end{cases}$$

定理 3.4. $\psi \in H^3_Q(Q_4; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ は（コホモロジー群の中で）位数 4 であるとする。$\phi \in H^2_Q(Q_4; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ を（唯一の）0 でない元とするとき、3 の倍数でない m に対して次が成り立つ：

$$\Psi_\psi(F^{(m,\nu)}) = \begin{cases} \Psi_{m\psi}(F) & (n \notin 3\mathbb{Z} \text{ のとき}) \\ (2^{2(m,n)-3} + 2^{(m,n)-2})\Psi_{m\psi}(F) & (m \notin 2\mathbb{Z} \text{ かつ} \\ \quad +(2^{2(m,n)-3} - 2^{(m,n)-2})((\nu \cup \Phi_\phi) \cdot \Psi_{m\psi})(F) & \quad n \in 3 + 6\mathbb{Z} \text{ のとき}), \\ 4^{(m,n)-1}\Psi_{2\psi}(F) & (m \in 2 + 4\mathbb{Z} \text{ かつ} \\ \quad +3 \cdot 4^{(m,n)-1}((\nu \cup \Phi_\phi) \cdot \Psi_{2\psi})(F) & \quad n \in 3 + 6\mathbb{Z} \text{ のとき}), \\ 4^{(m,n)-1}\left(\dfrac{m}{(m,n)}, 2\right)^2 \Psi_{m\psi}(F) & (\text{それ以外のとき}). \end{cases}$$

なお、$H_1^Q(Q_4) = \mathbb{Z}, H_2^Q(Q_4) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_3^Q(Q_4) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ であり、上の二つの定理により、Q_4 のあらゆる 3-コサイクルに対するケーブル化公式が得られたことになる。また、特に定理 3.4 は、定理 3.1 において、実際に 2-CI の項が現れる場合があるということを示している（[N] で計算されたものにおいては 3-CI の項しか現れなかった）。

4 証明と一般化

紙数の関係上、証明の細部に触れることはできないが、何が起こっているのかということを少し書いておくことにする。

一般の有限カンドル Y に対し、m 重化に対応するカンドル Y^m と、$1/m$ 捩ることに対応する Y^m の自己同型 τ が定まり、τ は kink map と呼ばれる特殊なものであることがわかる。Y^m を分解することで、問題は連結カンドルとその上の kink map の組についての場合に帰着される。

一方、カンドル X とその kink map τ の組から、曲面結び目 F とその上のコホモロジー $\nu \in H^1(F)$ の組に対する彩色を考えることができ、そのコサイクル不変量も定義することができる。簡単のため X を連結とし、$\hat{X}$ を、X を τ の作用で割ってできるカンドルとする。(X, τ) に対応して $\mathcal{B}^{Q'}\hat{X}$ 上の S^1 束 $\mathcal{B}_\tau X$ が定まるが、(F, ν) の (X, τ)-彩色は F から $\mathcal{B}_\tau X$ への連続写像を定め、先のコサイクル不変量は、$\mathcal{B}_\tau X$ の 2-コサイクルを引き戻して評価したものに帰着されることがわかる。

もともと考えていたカンドル Y が Alexander であるとき、Y^m を分解して出てくる連結カンドルは互いに同型な Alexander カンドルであり、また、連結 Alexander カンドル上の kink map は

恒等写像しかないことが知られている。すなわち上の記号でいうと $X=\hat{X}$ で、$\mathcal{B}_\tau X$ は自明な S^1 束、すなわち $\mathcal{B}^{Q'}X\times S^1$ であり、コホモロジー群は

$$H^2(\mathcal{B}_\tau X;A)\cong H^1(\mathcal{B}^{Q'}X;A)\oplus H^2(\mathcal{B}^{Q'}X;A)\cong H^2_Q(X;A)\oplus H^3_Q(X;A)$$

と分裂する。これに対応してケーブル化の 3-CI は 3-CI と 2-CI に分裂し、定理 3.1 のような形に書かれることがわかる。他の定理は定理 3.1 に現れるコサイクルを計算することで得られるのだが、ここでは詳細は省き、それほど容易ではない、とだけ述べておく。

一般には非自明な kink map が存在するのでこのような簡明な結果は得られないが、(X,τ)-彩色から得られる写像 $F\to\mathcal{B}_\tau X$ は、対応する $\hat{X}$-彩色から得られる写像 $g_\mathcal{C}:F\to\mathcal{B}^{Q'}\hat{X}$ を ν を使って補正して持ち上げたものであろう、と考えており、ホモトピー類 $[F,\mathcal{B}^{Q'}\hat{X}]$ の多重集合に値をとる（よく知られているものとは異なる）ホモトピー不変量を定めてやることで、一般の場合のケーブル化公式も書き表すことができるであろう、というのが現時点での予想である。

謝辞

今回は 5 日間、楽しく有意義な時間を過ごすことができた。セミナーの企画・実行や旅費の補助の手配をしてくださった運営委員の皆様に篤く御礼申し上げたい。

参考文献

[CJKLS] Carter, J. S., Jelsovsky, D., Kamada, S., Langford, L., Saito, M., *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3947–3989.

[CSS] Carter, J. S., Saito, M., Satoh, S., *Ribbon concordance of surface-knots via quandle cocycle invariants*, J. Aust. Math. Soc. **80** (2006), 131–147.

[E] Eisermann, M., *Quandle coverings and their Galois correspondence*. Fund. Math. **225** (2014), 103–168.

[I] Ishikawa, K., *Cabling formulae of quandle cocycle invariants for surface knots*, Master thesis, Kyoto University, January, 2016.

[M] Murakami, J., *The parallel version of polynomial invariants of links*. Osaka J. Math. **26** (1989), 1–55.

[N] 成瀬 透, “曲面結び目のカンドルコサイクル不変量の多重化公式”, 修士論文, 京都大学数理解析研究所, 2015 年 1 月. http://hdl.handle.net/2433/194277