$\mathcal{W}$ 代数の自由場実現

元良 直輝 [*]

京都大学数理解析研究所，2016 年 2 月

1　研究の背景

$\mathcal{W}$ 代数とは二次元共形場理論の枠組みの中で Virasoro 代数の一般化として導入された (スーパー) 頂点代数の族である。 一般に $\mathcal{W}$ 代数は, 複素係数の有限次元単純リー代数または basic classical なスーパーリー代数 $\mathfrak{g}$, そのべき零元 f（スーパーの場合には even とする）, 複素数 k, そして f に関して *"good"* な $\mathfrak{g}$ の次数付け Γ に付随する量子 Drinfeld-Sokolov 還元から定まる BRST 複体 $C_k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ のコホモロジー

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) := H(C_k(\mathfrak{g}, f; \Gamma))$$

として定義される [7]。このとき $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ を $\mathfrak{g}, f, k, \Gamma$ に付随する $\mathcal{W}$ 代数と呼び, k をそのレベルという。$k \neq -h^\vee$（非臨界レベル）のとき, $\mathcal{W}$ 代数は（スーパー）頂点共形代数の構造を持つ。特に Virasoro 頂点代数を含む。ただし $h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数である。また $\mathcal{W}$ 代数の頂点共形代数構造は Γ の選び方によって変化するが, 頂点代数構造は変わらない。次の定理が知られている。

定理 1.1 (Feigin-Frenkel [2, 5])**.** $\mathfrak{g}$ を有限次元単純リー代数, f をその正則べき零元, Γ をその”good” な次数付けとする。k が generic のとき, 対応する $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数の双対 $\mathfrak{h}^*$ に付随する Heisenberg 頂点代数の部分頂点代数として次のように実現される:

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) \simeq \bigcap_{i=1}^{\mathrm{rank}\,\mathfrak{g}} \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}\int \alpha_i(z)}\ dz,$$

ただし $\nu = \sqrt{k + h^\vee}$, $\alpha_i(z)$ は $\mathfrak{g}$ の単純ルートに対応する Heisenberg 頂点代数の場である。

これを $\mathcal{W}$ 代数の自由場実現という。$\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}\int \alpha_i(z)}\ dz$ をその Screening 作用素といい, Heisenberg 頂点代数からその加群への線形作用素である。自由場実現を用いることで $\mathcal{W}$ 代数の生成元 (または生成する場) を容易に計算することが出来る。さらに $\mathfrak{g}$ が A_n 型の時, 実現する Heisenberg 頂点代数のことを Fock 空間と呼び, 対称関数の空間と同一視することによって, $\mathcal{W}$ 代数の生成元が Jack 多項式と呼ばれるものと対応することが知られている。

最初に $\mathcal{W}$ 代数を定義したのは Zamolodchikov [8] である。Zamolodchikov は Virasoro 頂点代数の一般化として, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ で f が正則べき零元の場合に対応する $\mathcal{W}$ 代数を定義し, Fateev と Lukyanov らによって A_n, B_n, D_n 型の $\mathcal{W}$ 代数が定義された [1]。一般の有限次元単純リー代数 $\mathfrak{g}$ とその正則べき零元 f に対応する $\mathcal{W}$ 代数を BRST コホモロジーを用いて定義したのは Feigin と Frenkel [3]

[*]gnr@kurims.kyoto-u.ac.jp

で, その後 Kac, Roan, 脇本らによって最も一般的な場合に定義された [7]。 定理 1.1 は Fateev と Lukyanov らの $\mathcal{W}$ 代数の構成法の一般化となっており, 実際に A_n, D_n 型の $\mathcal{W}$ 代数は $\mathfrak{g}$ が A_n, D_n 型で f がその正則べき零元の場合に対応する $\mathcal{W}$ 代数と一致する。しかしながら, B_n 型の $\mathcal{W}$ 代数は $\mathfrak{g}$ が B_n 型で f がその正則べき零元の場合に対応する $\mathcal{W}$ 代数とは一致しない。次のような予想がある。

予想 1.2. Fateev と Lukyanov によって構成された B_n 型の $\mathcal{W}$ 代数は, スーパーリー代数 $\mathfrak{osp}(1, 2n)$ とその正則べき零元 f に対応する $\mathcal{W}$ 代数と同型である。

$n = 1$ の時, これは正しいことが Kac, Roan, 脇本らによって確かめられている。$n \geq 2$ の時にも正しいことを証明するのが私の目的である。実際には私の結果はこれよりも遥かに一般的な場合に $\mathcal{W}$ 代数の自由場実現があることを主張する。その応用として次の予想を証明する。

予想 1.3. Feigin と Semikhatov によって構成された $\mathcal{W}_n^{(2)}$ 代数は, リー代数 $\mathfrak{sl}_n$ とその副正則べき零元 f に対応する $\mathcal{W}$ 代数と同型である。

$\mathcal{W}_n^{(2)}$ 代数とは Feigin と Semikhatov らによって構成された頂点代数で, $n = 3$ の時は Bershadsky-Polyakov 代数と呼ばれる頂点代数に一致する [4]。上の予想は $n \leq 3$ の場合に正しいことが知られている。

2 主結果

$\mathfrak{g}$ を複素係数の有限次元単純リー代数または basic classical なスーパーリー代数, f をそのべき零元 f（スーパーの場合には even とする）, k を複素数, そして

$$\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$$

を $\mathfrak{g}$ の次数付けであって, $f \in \mathfrak{g}_{-1}$ かつ $\mathrm{ad}f : \mathfrak{g}_j \to \mathfrak{g}_{j-1}$ が $j \geq \frac{1}{2}$ のとき単射, $j \leq \frac{1}{2}$ のとき全射であるとする。また $(\cdot|\cdot)$ を $\mathfrak{g}$ 上の正規化された超対称非退化不変双線形形式とする。このとき $\mathfrak{g}_0$ は簡約スーパーリー代数であり, 任意の $u, v \in \mathfrak{g}_0$ に対し

$$\tau_k(u|v) = k(u|v) + \frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}}(u|v) - \frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}_0}(u|v)$$

とすると, τ_k は $\mathfrak{g}_0$ 上の超対称不変双線形形式となる。ただし $\kappa_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ 上の Killing form である。また Γ の満たす条件から, 任意の $u, v \in \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$ に対し

$$< u \mid v >= (f|[u, v])$$

と定めると $< \cdot \mid \cdot >$ は $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$ 上の非退化超反対称双線形形式を定める。ここで $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ を $\mathfrak{g}_0$ とその不変形式 τ_k から定まる普遍アファイン頂点代数, F^{ne} を $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$ と $< \cdot \mid \cdot >$ から定まる中立フェルミオン頂点代数とする（詳細な定義は [6, 7] にある）。

定理 2.1. k が generic のとき, 任意の $\mathfrak{g}, f, \Gamma$ に対して, 対応する $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ はテンソル頂点代数 $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \otimes F^{\mathrm{ne}}$ の部分頂点代数として実現され, ある Screening 作用素たちの共通核として構成される。

Screening 作用素の具体形は [6] にある。Γ として $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$（Cartan 部分代数）となるように取れる場合を考える。このとき $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ は $k \neq -h^\vee$ ならば $\mathfrak{h}^*$ に付随する Heisenberg 頂点代数と同型である。これを $\mathcal{H}$ と表す。Δ を $\mathfrak{g}$ のルート系, Π をその単純ルートの集合であって正ルートのルートベクトル空間が Γ に対して非負次数の空間に含まれるようにとる。すなわち Δ_+ を正ルートの集合とすると

$$\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_{\geq 0}$$

が成り立つ。ただし $\mathfrak{g}_\alpha$ は α のルートベクトル空間である。今, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ だから

$$\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{>0}$$

である。ここで, 任意の $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に対して

$$\Delta_j = \{\alpha \in \Delta \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_j\}, \quad \Pi_j = \Pi \cap \Delta_j$$

と定める。このとき

$$\Pi = \Pi_{\frac{1}{2}} \cup \Pi_1, \quad \Pi_{\frac{1}{2}} = \Delta_{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ。$\alpha \in \Pi$ に対して, $\alpha(z)$ を α に対応する $\mathcal{H}$ 上の場, また $\alpha \in \Pi_{\frac{1}{2}}$ に対して, $\Phi_\alpha(z)$ をそのルートベクトル $e_\alpha \in \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$ に対応する F^{ne} 上の場とする。定理 2.1 から次が成り立つ。

定理 2.2. k が generic のとき, Γ が $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ となるようにとれるような $\mathfrak{g}, f$ に対し, 対応する $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ はテンソル頂点代数 $\mathcal{H} \otimes F^{\mathrm{ne}}$ の部分頂点代数として次のように実現される:

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) \simeq \bigcap_{\substack{\alpha\in\Pi_1 \\ (f|e_\alpha)\neq 0}} \int \mathrm{e}^{\int \alpha(z)}\, dz \cap \bigcap_{\alpha\in\Pi_{\frac{1}{2}}} \int :\mathrm{e}^{\int \alpha(z)} \Phi_\alpha(z): dz$$

ただし $:A(z)B(z):$ は $A(z)$ と $B(z)$ の正規順序積を表す。

これは定理 1.1 の結果を含んでおり, より多くの場合の $\mathcal{W}$ 代数の自由場実現を与えている。特に $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1, 2n)$, f をその正則べき零元のときに次を得る。

定理 2.3. 予想 1.2 は非臨界レベルのとき成立する。

より一般的な結果である定理 2.1 は直接的には自由場実現とは言えないが, Screening 作用素によって構成されている。特に $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, f が副正則べき零元のときに定理 2.1 を用いると, Feigin と Semikhatov による $\mathcal{W}_n^{(2)}$ 代数の構成と一致する。

定理 2.4. 予想 1.3 は非臨界レベルのとき成立する。

参考文献

[1] V.A. Fateev, S.L. Lukyanov, *Additional symmetries and exactly solvable models of two-dimensional Conformal field theory*, Sov. Sci. Rev. A. Phys., Vol. 15 (1–117), 1990.

[2] B.L. Feigin, E. Frenkel, *Affine Kac-Moody Algebras At The Critical Level And Gelfand-Dikii Algebras*, Int. J. Mod. Phys., A7S1A, 197, 1992.

[3] B.L. Feigin, E. Frenkel, *Quantization of Drinfeld-Sokolov reduction*, Phys. Lett., B246, 75–81, MR 1071340, 1990.

[4] B.L. Feigin, A. Semikhatov, $\mathcal{W}_n^{(2)}$*-algebras*, Nuclear Phys., B 698, No. 3, 409–449, 2004.

[5] E. Frenkel, D. Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, Math. Surv. Monogr., Vol. 88, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[6] N. Genra, *Screening Operators for* $\mathcal{W}$*-algebras*, appearing.

[7] V.G. Kac, S.-S. Roan, M. Wakimoto, *Quantum reduction for affine superalgebras*, Commun. Math. Phys., 241(2-3), 307–342, 2003.

[8] A.B. Zamolodchikov, *Infinite additional symmetries in two dimensional conformal quantum field theory*, Theor. Math. Phys., 65, 1205, 1986.