

次数6の del Pezzo ファイブレーションを持つ3次元概 Fano 多様体の分類について

福岡 尊*

東京大学大学院数理科学研究科, 2016年2月

この度は第13回城崎新人セミナーで発表する機会を与えて頂き、ありがとうございました。このような場を提供して下さい、運営委員の皆様と、参加者の皆様に、心から感謝致します。

1 研究の背景

非特異な複素射影多様体 X の反標準因子 $-K_X$ が豊富であるとき、 X を **Fano 多様体** という。射影空間 \mathbb{P}^n や、 \mathbb{P}^n の次数 n 以下の超曲面などが、Fano 多様体の典型例である。Fano 多様体は、その分類理論を始めとして、現在でも深く研究が行われている。ここで、豊富性を弱めた条件として、**ネフかつ巨大** という条件を考えよう。 $-K_X$ がネフかつ巨大であるとき、 X を **弱 Fano 多様体** と呼び、Fano 多様体でない弱 Fano 多様体を **概 Fano 多様体** という。大雑把に言えば、概 Fano 多様体は Fano 多様体の“退化”であり、概 Fano 多様体の分類も興味深い問題の一つである。

(概) Fano 多様体の分類に際し、具体的な取り組みとして以下の3つの問題が挙げられる：

問題 1. (概) Fano 多様体 X の不変量 (の組) が取りうる値を評価せよ。

ここで言う不変量とは、**ピカル数** $\rho(X)$ ¹、**反標準次数** $(-K_X)^{\dim X}$ 、そして X の持つ端射線収縮のタイプなどが挙げられる。固定された不変量の組について、集合

$$\{X \mid X \text{ はその固定された組を不変量の組として持つ}\}$$

を、不変量の組に対応する **クラス** と呼ぶ事にする。

問題 2. 取り得る不変量の各値に対し、それに対応するクラスは元を持つか。

問題 3. クラスが空でないとき、そのクラスに属する任意の (概) Fano 多様体を、統一的に記述する方法を確立せよ。

問題 3 は、特に各クラスにモジュライ空間の構造を入れる際に、重要な視点を与える。例えば del Pezzo 曲面、すなわち 2次元 Fano 多様体については、3つの問題は解かれている。

1. 例えば del Pezzo 曲面 S の**次数** $d = (-K_S)^2$ が取りうる値は $1 \leq d \leq 9$ である。
2. 各 $d \in \{1, \dots, 9\}$ について、ある del Pezzo 曲面 S で $(-K_S)^2 = d$ を満たすものが存在する。

*tfukuoka@ms.u-tokyo.ac.jp

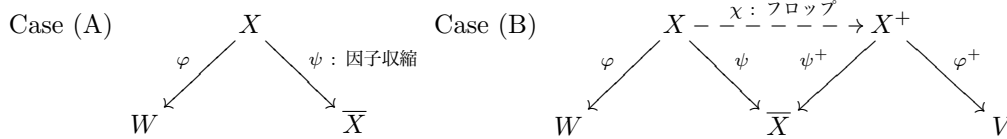
¹ X が弱 Fano 多様体なら $\rho(X)$ は第 2 Betti 数 $b_2(X)$ に一致する。

3. 例えば、次数 3 (resp. 4, 5) の del Pezzo 曲面は \mathbb{P}^3 の 3 次曲面 (resp. \mathbb{P}^4 の $(2) \cap (2)$ 完全交差, $\text{Gr}(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$ の線型切断) となる. 次数 6 の del Pezzo 曲面は, $(\mathbb{P}^2)^2 \subset \mathbb{P}^8$ の線型切断であり, $(\mathbb{P}^1)^3 \subset \mathbb{P}^7$ の線型切断でもある.

3 次元 Fano 多様体の分類問題は, Fano 自身による研究を発端として, Iskovskikh, 藤田, 向井, 森-向井によって取り組まれた. 特に上の 3 つの問題については満足の行く解答が得られている.

2 概 Fano 多様体の分類理論と主結果 1

3 次元概 Fano 多様体 X の分類を考えよう. 現在までの研究では, Picard 数が最小の場合, すなわち $\rho(X) = 2$ の場合が主に調べられている². この場合, 森理論により, X は 2 つの端射線収縮を持つ. K_X -負な端射線収縮を $\varphi: X \rightarrow W$, K_X -自明な端射線収縮を $\psi: X \rightarrow \bar{X} \simeq \text{Proj} \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, -nK_X)$ とする. この場合, ψ は因子収縮, またはフロップ収縮である. ψ がフロップ収縮ならば, そのフロップを $\chi: X \dashrightarrow X^+$ とすると, X^+ は K_{X^+} -負な収縮射 $\varphi^+: X^+ \rightarrow V$ を持つ. まとめると, ψ の状況に応じて以下のように場合分け出来る.



K_X -負な収縮射 φ には, 以下の 3 通りが起こりうる. φ^+ についても同様である:

- φ は W のある部分多様体にそったブローアップ. このとき φ を**因子収縮**という.
- $W = \mathbb{P}^2$ で, φ の一般ファイバーが \mathbb{P}^1 . このとき φ を**コニック束**という.
- $W = \mathbb{P}^1$ で, φ の一般ファイバーは次数 d の del Pezzo 曲面. このとき φ を**次数 d の del Pezzo ファイブレーション**という.

以下では, φ を次数 d の del Pezzo ファイブレーションとする. Jahnke-Peternell-Radloff は, Case (A), (B) の両方の場合に関して問題 1 に取り組み, 取り得る不変量の組を絞った [3, 4]. しかし, 各不変量に対応するクラスが空かどうかは, 完全には調べられていなかった. 一方で, 竹内は Case (B) かつ $d \neq 6$ の場合に取り組んだ [6]. 彼は不変量の組を絞り, さらに各不変量の組に対してそれに属する例を構成した. この 2 つの研究は独立して行われている.

そこで $d = 6$ と仮定しよう. これが今回の講演のタイトルにある設定である. [3, 4] によって, $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は以下の表 1, 2 に挙げた 14 のクラスのどれかになる. しかし, 元の存在が知られていたのは, そのうちの 5 クラスのみだった. それを踏まえて, 主結果 1 は以下である:

主結果 1. 各 14 クラスに対して, それに属する例が存在する.

表 1: Case (A)

Case	Type of $\psi: X \rightarrow \bar{X}$	$(-K_X)^3$	\exists is known by
A	$(g, d) = (1, 6)$	12	[2]

² $\rho(X) = 1$ ならば $-K_X$ がネフかつ巨大と豊富が同値であり, 概 Fano にならない.

表 2: Case (B)

Case	V	Type of $\varphi^+ : X^+ \rightarrow V$	$(-K_X)^3$	\exists is known by
B-(i)	$V(10)$	smooth point	10	[5] (2.8.1)
B-(ii)-1	$B(5)$	$(g, d) = (0, 4)$	22	[4] 7.4 No.1.
B-(ii)-2	\mathbb{Q}^3	$(g, d) = (1, 6)$	18	[4] 7.4 No.3.
B-(ii)-3	\mathbb{P}^3	$(g, d) = (1, 6)$	16	[4] 7.4 No.4.
B-(ii)-4	$V(9)$	$(g, d) = (0, 2)$	10	[5] (2.8.2)
B-(ii)-5	$B(4)$	$(g, d) = (1, 6)$	8	[2]
B-(ii)-6	$V(10)$	$(g, d) = (1, 6)$	6	[2]
B-(ii)-7	$V(9)$	$(g, d) = (1, 6)$	4	[2]
B-(iii)	\mathbb{P}^2	$\deg(\text{disc.}) = 4$	14	[2]
B-(iv)-1	\mathbb{P}^1	dP_6	12	[2]
B-(iv)-2	\mathbb{P}^1	dP_6	6	[2]
B-(iv)-3	\mathbb{P}^1	dP_6	4	[2]
B-(iv)-4	\mathbb{P}^1	dP_6	2	[2]

表 1, 2 について

Fano 多様体 V について $i_V := \max\{i \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \exists H \in \text{Pic}(V) \text{ s.t. } -K_V = iH\}$ を **Fano 指数** という。

- 表 1 の “ (g, d) ” は, ψ が $-K_X.C = d$ となる種数 g の曲線 C での爆発である事を表す。
- 表 2 の左から 2 番目の列は V のタイプを表す。 $V = \mathbb{Q}^3$ は \mathbb{P}^4 の非特異 2 次超曲面を表す。 $V = B(m)$ は $i_V = 2$ かつ $(-K_V)^3 = 8m$ を満たす Fano 多様体を表す。 $V = V(g)$ は $i_V = 1$ かつ $(-K_V)^3 = 2g - 2$ を満たす Fano 多様体を表す。
- 表 2 の左から 3 番目の列は φ^+ のタイプを表す。
 - “smooth point” は φ^+ が非特異点での爆発である事を表す。
 - “ (g, d) ” は φ^+ が $-K_V.C = i_V \cdot d$ を満たす種数 g の曲線 C での爆発である事を表す。
 - “ $\deg(\text{disc.}) = 4$ ” は $\varphi^+ : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ がコニック束であり, 判別式因子 (discriminant divisor) の次数が 4 である事を表す。
 - “ dP_6 ” は φ^+ が次数 6 の del Pezzo ファイブレーションである事を表す。
- 右端の列は, 各クラスに属する元の存在の証明を行った文献である。

主結果 1 の証明の概略. (B)-(ii) の場合は, Fano 多様体 V の部分多様体として, 種数 1 かつ次数 6 の曲線 C が構成出来るかという問題に帰着される。このような問題については, [3], [4], [6], [1] 等により同様の研究が成されている。まず, B-(ii)-5 の場合は, 種数 1 かつ次数 6 の曲線 C が $(\mathbb{P}^1)^3 \subset \mathbb{P}^7$ の線型切断で得られる事, さらに Segre 埋め込みに関する定義方程式が 2 次式で与えられる事の 2 点により, C を含む \mathbb{P}^5 の $(2) \cap (2)$ 完全交差 V を具体的に得る事が出来る。B-(ii)-6, 7 の場合は, K3 曲面の Néron-Severi 格子に関する理論を利用する事で例を構成する。

(A), (B)-(iii), B-(iv) の場合は, このような直接の構成は難しい。それを解決するために, 以下の双有理変換を考える; $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{P}^3$ を非特異な 2 次曲面とし, 一般の 3 点 $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Q}^2$ をとる。

この3点の張る平面と \mathbb{Q}^2 の交わりは2次曲線 C である. $\sigma: F \rightarrow \mathbb{Q}^2$ を p_1, p_2, p_3 での爆発とすれば, C の固有変換 \tilde{C} は (-1) -曲線となる. \tilde{C} の爆縮 $\tau: F \rightarrow S$ を行くと, S は次数6の del Pezzo 曲面である. この非常に基本的な双有理変換 $S \leftarrow F \rightarrow \mathbb{Q}^2$ を相対化したのが次の命題である:

命題 2.1. [2, Proposition 3.5] 非特異な2次曲面ファイブレーション $\pi: W \rightarrow \mathbb{P}^1$ と, 滑らかな部分曲線 $B \subset W$ の組 $(\pi: W \rightarrow \mathbb{P}^1, B)$ が, 以下の条件 (†) を満たすと仮定する:

$$(\dagger) \cdots \begin{cases} \deg(\pi|_B: B \rightarrow \mathbb{P}^1) = 3 \text{ かつ} \\ \tau: Z := \text{Bl}_B W \rightarrow W, p := \pi \circ \tau: Z \rightarrow \mathbb{P}^1 \text{ に対し, } -K_Z \text{ が } p\text{-ネフかつ } p\text{-巨大.} \end{cases}$$

この時, ある \mathbb{P}^1 上の余次元1で同型な双有理写像 $\Phi: Z \dashrightarrow Y$ と, \mathbb{P}^1 上の双有理射 $\mu: Y \rightarrow X$ が存在する. さらに $q: Y \rightarrow \mathbb{P}^1, \varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ をそれぞれ構造射とすれば, 以下が成り立つ:

(1) 以下の図式は可換である:

$$\begin{array}{ccccccc} & & D & \subset Y = \text{Bl}_C X \xleftarrow{\Phi} Z = \text{Bl}_B W \supset & E & & \\ & \swarrow & & \downarrow q & & \searrow & \\ C & \subset & X & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{\pi} & W \supset B \\ & & & & & & \end{array}$$

(3) μ は φ -セクション C に沿った爆発であり, φ は次数6の del Pezzo ファイブレーション.

(4) q -ファイバーを $F_Y, D := \text{Exc}(\mu), E := \text{Exc}(\tau), E_Y := \Phi_* E$ とおけば, 以下が成立する:

$$D \equiv \frac{1}{2}(-K_Y) - \frac{1}{2}E_Y + zF_Y, \quad (-K_X)^3 = \frac{3(-K_W)^3 - 16g_B - 32}{4}, \\ -K_X \cdot C = \frac{8(-K_W) \cdot B - 24g_B - (-K_W)^3 - 32}{8} \text{ and } z = \frac{4(-K_W) \cdot B - 8g_B - (-K_W)^3}{8}.$$

これによって, 例の構成は組 $(\pi: W \rightarrow \mathbb{P}^1, B)$ の構成に帰着できる. 例えば W として, \mathbb{Q}^3 の2次曲線 Γ での爆発 (resp. \mathbb{P}^3 の次数4の楕円曲線 Γ での爆発) を考える. すると $(\pi: W \rightarrow \mathbb{P}^1, B)$ の構成は, \mathbb{Q}^3 (resp. \mathbb{P}^3) 内の曲線の組 (B, Γ) の構成に等しい. このような曲線の組の構成には, やはり K3 曲面の Néron-Severi 格子に関する理論を用いる. 実際 B-(iv)-3 以外は, このような W で構成出来る (B-(iv)-3 の場合, W は $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1$ の $(2, 2)$ 因子とする). この方針で証明するには, $g(B), \deg B, \#(B \cap \Gamma)$ の値が必要である. 命題 2.1 (4) と各クラスの条件から, これらの値にはある程度の制限がつく. その中で条件 (†) を満たし $-K_X$ がネフとなるものを, 試行錯誤で見つける事で構成する. \square

3 次数6の特殊事情と主結果2

竹内の結果 [6] は, 以下の事実を用いたものであった.

事実 1. $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を次数 d の del Pezzo ファイブレーションとする. もし $d \neq 6$ ならば, ファイバーが全て同型な Fano 多様体による全射 $\varphi_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ と, \mathbb{P}^1 上の閉埋め込み $X \hookrightarrow Y$ が存在して, X は Y の \mathbb{P}^1 上相対的な完全交差になる.

これは問題3の緩い意味での解答と言える. 例えば, $d = 3$ (resp. 4, 5) ならば, $\varphi_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ は \mathbb{P}^3 -束 (resp. \mathbb{P}^4 -束, $\text{Gr}(2, 5)$ -束) であり, X は Y に \mathbb{P}^1 上相対的な3次曲面 (resp. $(2) \cap (2)$ 完全交差, 線型切断) として埋め込まれる.

一方で $d = 6$ の場合を考えると、 X の埋め込み先 $\varphi_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ があるとすれば、その一般ファイバーは $(\mathbb{P}^2)^2$ 、もしくは $(\mathbb{P}^1)^3$ が適切だと考えられる。しかし、底空間である \mathbb{P}^1 が単連結であることから、 $\varphi_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ は必ず退化ファイバーを持ち、事実 1 に相当する理論が無い。これが $d = 6$ の時の面白さである。私はこの現象を特に X が概 Fano の場合に調べ、以下を得た：

主結果 2. B-(ii)-1 (resp. B-(ii)-2, B-(ii)-5) の各元 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ に対して、ある Picard 数 2 の非特異射影多様体 Y と全射 $\varphi_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ であって、 φ_Y の一般ファイバーが $(\mathbb{P}^2)^2$ (resp. $(\mathbb{P}^1)^3$, $(\mathbb{P}^2)^2$) かつ X が Y に \mathbb{P}^1 上線型切断として埋め込まれるものが存在する。

さらに B-(ii)-1 の場合、 $\varphi_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ は、B-(ii)-1 に属する各元 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ の取り方に依らない。従って、B-(ii)-1 に属する任意の元は $\varphi_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ の相対的な線型切断となる。

これにより、クラス B-(ii)-1 に関しては問題 3 に満足の行く解答を得る事が出来た。

B-(ii)-1 についての証明の概略. 根本的なアイデアは「高次元版の Case (B) の図式を構成する」ということである。Case (B) の図式を思い出そう。まず、B-(ii)-1 の任意の元 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ をとる。フロップ $\chi: X \dashrightarrow X^+$ について、 X^+ は $V = \text{Gr}(2, 5) \cap \mathbb{P}^6$ の次数 4 の正規有理曲線 C での爆発である。フロップされた曲線は C とちょうど 2 点で交わる直線 l の固有変換であり、 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を定める線型系を V に固有変換すれば、 V 上のペンシル $|\mathcal{O}_V(1) \otimes \mathcal{I}_{l \cup C}|$ を得る。

この幾何を“高次元に拡張”する。まず $M = \text{Gr}(2, 5) \cap \mathbb{P}^8$ 及び 3-平面 $P = \mathbb{P}^3 \subset M$ で、 $V \cap P = l$ を満たすものが存在する。爆発 $f_M: \widetilde{M} = \text{Bl}_P M \rightarrow M$ を考えると、 \mathbb{Q}^3 上の \mathbb{P}^2 束 $\pi_M: \widetilde{M} \rightarrow M$ が存在する。ここで、 $R := f_M(\pi_M^{-1}(\pi_M((f_M)_*^{-1}C)))$ を考えると、 R は C を線型切断としてもつ次数 4 のスクロールである事がわかる。これにより、 V (resp. l , C) を線型切断として持つ M (resp. $P = \mathbb{P}^3$, 次数 4 のスクロール R) が構成された。さらに $|\mathcal{O}_M(1) \otimes \mathcal{I}_{P \cup R}|$ はペンシルを成す。 $\text{Bl}_R M$ において P はフリップでき、ペンシルの固定点が消え、一般ファイバーが $(\mathbb{P}^2)^2$ なるファイブレーション $\varphi_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ が得られる。□

任意の次数 6 の del Pezzo ファイブレーション $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ に対して、これを相対的な線型切断を持つ $\varphi_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ が自然に構成できるかという問題は、今後の課題である。

参考文献

- [1] J. W. Cutrone and N. A. Marshburn. Towards the classification of weak Fano threefolds with $\rho = 2$. *Cent. Eur. J. Math.*, 11(9):1552–1576, 2013.
- [2] T. Fukuoka. On the existence of almost Fano threefolds with del Pezzo fibrations. *arXiv preprint, arXiv:1603.07139*, 2016.
- [3] P. Jahnke, T. Peternell, and I. Radloff. Threefolds with big and nef anticanonical bundles. I. *Math. Ann.*, 333(3):569–631, 2005.
- [4] P. Jahnke, T. Peternell, and I. Radloff. Threefolds with big and nef anticanonical bundles II. *Cent. Eur. J. Math.*, 9(3):449–488, 2011.
- [5] K. Takeuchi. Some birational maps of Fano 3-folds. *Compositio Math.*, 71(3):265–283, 1989.
- [6] K. Takeuchi. Weak Fano threefolds with del Pezzo fibration. *arXiv preprint arXiv:0910.2188*, 2009.