変形BGG圏とSchur-Weyl双対性

藤田 遼*

京都大学数学教室，2016年2月

概要 Lie代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ と退化アフィンHecke環の表現を結びつける構成として知られる荒川-鈴木関手を用いて両者のアフィン最高ウェイト表現圏を比較する。この対応は古典的なSchur-Weyl双対性の変種であると見なせる。

1 Lie代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の最高ウェイト表現論

1.1 Lie代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の有限次元表現論

動機づけのため、まずは有限次元表現論を復習する。

$\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ を一般線形Lie代数とし、$e_{ij} \in \mathfrak{g}$ で (i,j)-行列単位を表す。任意の有限次元 $\mathfrak{g}$-表現 M は互いに可換な n 個の線形作用素 e_{ii} $(i = 1, 2 \ldots, n)$ の同時固有空間（別の言い方として、対角行列のなす可換部分Lie代数 $\mathfrak{h}$ の既約表現）の直和 $M = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}^n} M_\lambda$ に分解する。ここで $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して、$M_\lambda := \{v \in M \mid e_{ii} \cdot v = \lambda_i v, (\forall i)\}$ と定義する。$M_\lambda \neq 0$ となるとき、λ を M のウェイトと呼び、M_λ を M の（ウェイト λ の）ウェイト空間と呼ぶ。ウェイト空間分解の構造に着目することがLie代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現を分類するための基本的なアイデアである。以下では $\Lambda := \mathbb{Z}^n$ とし、簡単のため $\mathfrak{g}$-加群のウェイトはすべて Λ に属するとする。このとき M の指標を x_i たちのLaurent多項式として $\mathrm{ch}\, M := \sum_{\lambda\in\Lambda}(\dim M_\lambda) x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$ と定義する。

ウェイトの集合 Λ に半順序 $\leq$ を

$$\lambda \leq \mu \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{j} \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{j} \mu_i, & (\forall j = 1, 2, \ldots, n-1); \\ \text{and } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \end{cases}$$

によって定義する。$1 \leq i < j \leq n$ のとき、$e_{ij} \cdot M_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} \subset M_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{i-1},\lambda_i+1,\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_{j-1},\lambda_j-1,\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_n)}$ だから、狭義上三角行列のなす部分Lie代数 $\mathfrak{n}_+$ はウェイトを大きくする方向に作用する。ウェイト $\lambda \in \Lambda$ は条件 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ をみたすとき支配的であるという。Lie代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現は次の古典的な結果によって完全に分類される。

定理 1.1 (Cartan-Weyl理論)**.**

1. Lie代数 $\mathfrak{g}$ の任意の有限次元表現は半単純である。;
2. 各支配的ウェイト $\lambda \in \Lambda$ に対して $\dim V(\lambda)_\lambda = 1,\ V(\lambda)_\mu = 0$ $(\forall \mu \not\leq \lambda)$ をみたす有限次元既約 $\mathfrak{g}$-表現 $V(\lambda)$ が同型を除いてただ一つ存在する。;
3. $\{$ 支配的ウェイト全体 $\} \xrightarrow{\cong} \{\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現（の同型類）$\}; \lambda \mapsto V(\lambda)$;
4. 既約表現 $V(\lambda)$ の指標 $\mathrm{ch}\, V(\lambda)$ はSchur多項式 $S_\lambda(x)$ に一致する。 □

*rfujita@math.kyoto-u.ac.jp

1.2 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の BGG 圏

ここからは無限次元の表現も視野に入れて話を進める。有限次元既約表現は特に支配的ウェイトを最高ウェイトとする既約表現であった。そこで次に考えるべきは支配的でない最高ウェイトを持つ（無限次元の）既約表現である。これは次のように構成される。まずウェイト $\lambda \in \Lambda$ に対して、Verma 加群と呼ばれる "普遍最高ウェイト加群"

$$M(\lambda) := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_{\lambda-\rho} = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+)} \mathbb{C}_{\lambda-\rho}$$

を考える[1]。ただし $\rho := (0, -1, -2, \ldots, -n+1) \in \Lambda$ とする。各 Verma 加群 $M(\lambda)$ はその構成からただ一つの既約商加群 $L(\lambda)$ をもち、これが最高ウェイト $\lambda-\rho$ を持つ既約表現を与える。逆に最高ウェイト λ をもつ任意の既約 $\mathfrak{g}$-表現は $L(\lambda+\rho)$ に同型である。$\dim L(\lambda) < \infty$ となる必要十分条件は $\lambda-\rho$ が支配的であることであって、その場合は $L(\lambda) \cong V(\lambda-\rho)$ となる。

Verma 加群 $M(\lambda)$ やその既約商 $L(\lambda)$ を扱う自然な表現論的枠組みとして次の BGG 圏[2]がある。

定義 1.2 (Bernstein-Gelfand-Gelfand 1976)**.** 支配的ウェイト $\lambda \in \Lambda$ に対し、BGG 圏（の λ-block) $\mathcal{O}_\lambda$ を、Verma 加群たち $\{M(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{S}_n\lambda\}$ の部分商の有限拡大であってウェイト空間分解可能な $\mathfrak{g}$-加群たちのなす $\mathfrak{g}$-加群圏の充満部分圏として定義する。 □

BGG 圏 $\mathcal{O}_\lambda$ は半単純とは限らないアーベル圏であり、各対象は有限長の組成列を持つ。BGG 圏 $\mathcal{O}_\lambda$ に属する任意の既約表現はある $L(\mu)$ $(\mu \in \mathfrak{S}_n\lambda)$ に同型であり、特に 1 : 1 対応 $\mathfrak{S}_n\lambda \xrightarrow{\cong} \{\mathcal{O}_\lambda\text{の既約表現（の同型類）}\}; \mu \mapsto L(\mu)$ があることが知られている。

さて、次に既約表現の指標 $\mathrm{ch}\, L(\mu)$ を求めることを考える。既約指標たち $\{\mathrm{ch}\, L(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{S}_n\lambda\}$ および Verma 加群指標たち $\{\mathrm{ch}\, M(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{S}_n\lambda\}$ はともに線形空間 $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\mathrm{ch}\, M \mid M \in \mathcal{O}_\lambda\}$ の基底をなす。各 Verma 加群指標 $\mathrm{ch}\, M(\mu)$ は定義から簡単に求めることができるので、既約指標を求めるためには基底の変換行列である組成重複度 $([M(\mu) : L(\nu)])_{\mu,\nu\in\mathfrak{S}_n\lambda}$ を求めればよい。この問題の解がいわゆる "Kazhdan-Lusztig 予想" である。

定理 1.3 ("Kazhdan-Lusztig 予想", Beilinson-Bernstein 1981, Brylinski-柏原 1981)**.** 組成重複度 $[M(\mu) : L(\nu)]$ は適当な Kazhdan-Lusztig 多項式（これは $\mathfrak{S}_n$ の組み合わせ論で定義される）の 1 での値を用いて明示的に表せる。 □

1.3 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の変形 BGG 圏

双対空間 $\mathfrak{h}^*$ の座標環 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$ の原点 $0 \in \mathfrak{h}^*$ での完備化を $\mathbb{C}[[\mathfrak{h}^*]]$ で表す。ウェイト λ に対して、変形 Verma 加群

$$\widetilde{M}(\lambda) := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_{\lambda-\rho}[[\mathfrak{h}^*]] = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+)} \mathbb{C}_{\lambda-\rho}[[\mathfrak{h}^*]]$$

を定義する[3]。$\widetilde{M}(\lambda)$ は Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の作用に可換な $\mathbb{C}[[\mathfrak{h}^*]]$-作用を持ち、Verma 加群を原点の形式近傍 $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[[\mathfrak{h}^*]])$ 上で形式的に変形したものと見なせる。

定義 1.4 (Soergel 1990)**.** 支配的ウェイト $\lambda \in \Lambda$ に対し、変形 BGG 圏（の λ-block) $\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda$ を変形 Verma 加群たち $\{\widetilde{M}(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{S}_n\lambda\}$ の部分商の有限拡大のなす $(\mathfrak{g}, \mathbb{C}[[\mathfrak{h}^*]])$-双加群圏の充満部分圏として定義する。 □

---

[1] ここで $\mathbb{C}_{\lambda-\rho}$ は $\mathfrak{h}$ がウェイト $\lambda-\rho$ で作用し $\mathfrak{n}_+$ が自明に作用する 1 次元表現。

[2] BGG 圏に関しては文献 [4] に詳しい解説がある。

[3] $\mathbb{C}[[\mathfrak{h}^*]]$ には $\mathfrak{h}$ が左からの積によって自然に作用し $\mathfrak{n}_+$ が自明に作用するとして、$\mathbb{C}_{\lambda-\rho}[[\mathfrak{h}^*]] = \mathbb{C}_{\lambda-\rho} \otimes \mathbb{C}[[\mathfrak{h}^*]]$ を $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$ の左加群と思う。

通常の BGG 圏 $\mathcal{O}_\lambda$ は $\mathbb{C}[[\mathfrak{h}^*]]$ が自明に作用する部分圏として自然に $\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda$ に埋め込まれ、特に $\{L(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{S}_n\lambda\}$ が圏 $\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda$ の既約表現の同型類集合の完全代表系を与える。

変形 BGG 圏 $\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda$ は "アフィン最高ウェイト圏" の構造を持つ。

"定義" 1.5. [4]$\mathbb{C}$-線形アーベル圏 $\mathcal{C}$ は次の条件をみたすときアフィン最高ウェイト圏であるという。

1. 有限集合 Π が存在して $\mathcal{C}$ の単純対象（の同型類）および直既約射影対象（の同型類）をパラメトライズする。さらに $\pi \in \Pi$ に対応する直既約射影対象 $P(\pi)$ は対応する単純対象 $L(\pi)$ の射影被覆である。;

2. 各 $\pi \in \Pi$ に対し、2 つの直既約対象 $\Delta(\pi)$, $\widetilde{\Delta}(\pi)$ が存在して $P(\pi) \twoheadrightarrow \widetilde{\Delta}(\pi) \twoheadrightarrow \Delta(\pi) \twoheadrightarrow L(\pi)$ をみたす。$\widetilde{\Delta}(\pi)$ を標準対象、$\Delta(\pi)$ を被約標準対象と呼ぶ。;

3. (BGG 相互律) 各 $P(\pi)$ は標準対象たち $\widetilde{\Delta}(\rho)$ の有限回の拡大の結果であって、その重複度は被約標準対象の組成重複度と等式 $(P(\pi) : \widetilde{\Delta}(\rho)) = [\Delta(\rho) : L(\pi)]$, $\forall \pi, \rho \in \Pi$ で結ばれる。 □

定理 1.6 (Soergel 1990 [6], Fiebig 2003 [3])**.** 変形 BGG 圏 $\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda$ は $\{L(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{S}_n\lambda\}$ を単純対象、$\{M(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{S}_n\lambda\}$ を被約標準対象、$\{\widetilde{M}(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{S}_n\lambda\}$ を標準対象の族とするようなアフィン最高ウェイト圏の構造を持つ。 □

2 退化アフィン Hecke 環の表現論

退化アフィン Hecke 環 H_d は以下のように定義される非可換 $\mathbb{C}$-代数である。

- $\mathbb{C}$-ベクトル空間として $H_d = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d] \otimes \mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ であって、多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_d] \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d] \otimes 1$ および対称群の群代数 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d \cong 1 \otimes \mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ はともに H_d の部分 $\mathbb{C}$-代数になっている。;

- $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$, $i \in \{1, \dots, d-1\}$ について、

$$(1 \otimes s_{i,i+1})(f \otimes 1) = s_{i,i+1}f \otimes s_{i,i+1} + \frac{s_{i,i+1}f - f}{x_i - x_{i+1}} \otimes 1$$

（退化）アフィン Hecke 環の表現は p-進群 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Q}_p)$ の岩堀部分群による非自明な固定部分をもつ認容表現に対応し、歴史的には "Langlands プログラム" の観点から重要な研究対象である。

2.1 アフィン最高ウェイト構造

整数 $b \in \mathbb{Z}$ と自然数 $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、区間 $[b, s]$ を有限集合 $[b, s] := \{b, b+1, b+2, \dots, b+s-1\}$ とする。区間 $[b, s]$ に対して Hecke 環 H_s の 1 次元表現 $\mathbb{C}_{[b,s]} := \mathbb{C}\mathbf{1}_{[b,s]}$ を

$$\begin{aligned} x_i\mathbf{1}_{[b,s]} &= (b+i-1)\mathbf{1}_{[b,s]}, & i &= 1, \dots, s; \\ w\mathbf{1}_{[b,s]} &= \mathbf{1}_{[b,s]}, & \forall w &\in \mathfrak{S}_s \end{aligned}$$

で定義する。多重区間 $[\beta, \sigma] = ([\beta_i, \sigma_i])_{1 \le i \le m}$ が $\sigma_1 + \dots + \sigma_m = d$ をみたしているとする。このときタイプ σ の放物型部分代数 $H_\sigma = H_{\sigma_1} \times \dots \times H_{\sigma_m} \subset H_d$ の 1 次元表現 $\mathbb{C}_{[\beta,\sigma]} := \mathbb{C}_{[\beta_1,\sigma_1]} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{C}_{[\beta_m,\sigma_m]}$ を考え、その H_d への誘導表現 $\mathrm{Ind}_{H_\sigma}^{H_d}\mathbb{C}_{[\beta,\sigma]}$ を $S(\beta, \sigma)$ と表す。

[4]引用符 "　" にはここでの "定義" が簡略版であることをお断りする意味が込められている。実際にはパラメータ集合 Π は半順序集合であり、その順序が標準対象や射影対象の構造を統制する。

Hecke 代数 H_d の中心 Z_d は自然に対称多項式環 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_d]^{\mathfrak{S}_d}$ と同一視できることが知られている。点 $a\in\mathbb{C}^d/\mathfrak{S}_d=\mathrm{Specm}(Z_d)$ における中心 Z_d の完備化を $\hat{Z}_d(a)$ とし、$\hat{H}_d(a):=H_d\otimes_{Z_d}\hat{Z}_d(a)$ と定義する。多重区間 $[\beta,\sigma]=([\beta_i,\sigma_i])_{1\le i\le m}$ で $\sigma_1+\cdots+\sigma_m=d$ をみたすものに対し $[\beta,\sigma]$ に属する重複込み d 個の整数により点 $a=a(\beta,\sigma)\in\mathbb{Z}^d/\mathfrak{S}_d$ が決まる。このとき自然に $S(\beta,\sigma)\in\hat{H}_d(a)\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ [5]である。以下、節約のため $\mathcal{H}_d(a):=\hat{H}_d(a)\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ と書く。[6]

定理 2.1 (Zelevinsky 1980)**.** 各 $a\in\mathbb{Z}^d/\mathfrak{S}_d$ に対し、$a=a(\beta,\sigma)$ なる多重区間 $[\beta,\sigma]$ からなるある集合 $\mathrm{MS}(a)$ が存在して次を満たす。:

1. 各 $[\beta,\sigma]\in\mathrm{MS}(a)$ に対して $S(\beta,\sigma)$ は唯一の既約商 $L(\beta,\sigma)$ をもつ。;
2. $\mathrm{MS}(a)\xrightarrow{\cong}\{\mathcal{H}_d(a)$ の既約表現（の同型類）$\}$; $[\beta,\sigma]\longmapsto L(\beta,\sigma)$. □

定理 2.2 (“Kazhdan-Lusztig 予想の p-進類似”, Ginzburg 1987, Lusztig 1995)**.** 組成重複度 $[S(\beta,\sigma):L(\gamma,\tau)]$ は適当な Kazhdan-Lusztig 多項式の 1 での値を用いて明示的に表せる。 □

次の定理は Khovanov-Lauda-Rouquier 代数（=アフィン Hecke 環の一般化と見なせる次数付き代数）による圏論化の文脈で、量子包絡環の PBW 基底に対応する対象を探求する中で得られた。

定理 2.3 (加藤 2014 [5], Brundan-Kleshchev-McNamara 2014 [2])**.** 圏 $\mathcal{H}_d(a)$ は $\{L(\beta,\sigma)\mid[\beta,\sigma]\in\mathrm{MS}(a)\}$ を単純加群の族とし、$\{S(\beta,\sigma)\mid[\beta,\sigma]\in\mathrm{MS}(a)\}$ を被約標準加群の族とするようなアフィン最高ウェイト圏の構造を持つ。 □

3 アフィン最高ウェイト構造の比較

3.1 古典的 Schur-Weyl 双対性

$V:=\mathbb{C}^n$ を一般線形 Lie 代数 $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の自然な表現とする。テンソル積空間 $V^{\otimes d}$ には Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のテンソル表現としての左作用と d 次対称群 $\mathfrak{S}_d$ のテンソル成分の置換による右作用が互いに可換であるように入る。: $\mathfrak{g}\curvearrowright V^{\otimes d}\curvearrowleft\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$

定理 3.1 (Schur 1927, Weyl 1946)**.** 関手 $F_d:=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V^{\otimes d},?):\mathrm{Rep}_d\,\mathfrak{g}\longrightarrow\mathrm{Rep}_{\le n}\,\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ は圏同値を与える。ただし、$\mathrm{Rep}_d\,\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ の有限次元 d 次 “多項式” 表現[7]全体のなす圏、$\mathrm{Rep}_{\le n}\,\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ は長さ n 以下の d の分割に対応する有限次元表現全体のなす圏とする。 □

ただし、$\mathrm{Rep}_d\,\mathfrak{g}$ と $\mathrm{Rep}_{\le n}\,\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ はともに半単純な圏なので、これは既約表現（の同型類）の間に 1 : 1 対応があることと同値である[8]。

3.2 荒川-鈴木関手

ウェイト $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in\Lambda$ に付随する変形 Verma 加群 $\widetilde{M}(\beta)$ をとる。テンソル積空間 $\widetilde{M}(\beta)\otimes V^{\otimes d}$ には Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のテンソル表現としての左作用およびテンソル成分の置換と多項

[5] $\hat{H}_d(a)\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ は代数 $\hat{H}_d(a)$ の有限生成加群圏

[6] 以下の 2 つの定理については例えば [7] およびそこでの参考文献を参照。

[7] 代数群 $GL_n(\mathbb{C})$ の有限次元 d 次多項式表現の微分として得られる $\mathfrak{g}$ の表現、あるいは d の分割を与えるような支配的ウェイト λ に対応する既約 $\mathfrak{g}$ 表現 $V(\lambda)$ たちの直和のこと。

[8] 無限次元表現を考えに入れると $\mathfrak{g}$ の表現論は半単純でなくなり、とくに既約表現の行き先を見ただけでは圏同値とは言えない。

式環 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_d]$ の適当な作用によって得られる H_d の右作用が互いに可換であるように入る[9]。
: $\mathfrak{g} \curvearrowright \widetilde{M}(\beta)\otimes V^{\otimes d} \curvearrowleft H_d$

定義 3.2 (荒川-鈴木 1998 [1][7])**.** ウェイト β, ランク d の荒川-鈴木関手 $F_{\beta,d} : \mathfrak{g}\text{-mod} \longrightarrow H_d\text{-mod}$ を $F_{\beta,d} := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\widetilde{M}(\beta)\otimes V^{\otimes d}, ?)$ と定義する。 □

ウェイト λ,β が条件 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n > \beta_1 > \cdots > \beta_n$ を満たしているとする。このとき各 $\mu \in \mathfrak{S}_n\lambda$ に対し $[\beta,\mu-\beta] := ([\beta_i,\mu_i-\beta_i])_{1\leq i\leq n}$ は n 個の区間からなる多重区間をなす。集合 $\mathrm{MS}(a)^{\leq n}$ を n 個（以下）の区間からなる多重区間のなす $\mathrm{MS}(a)$ の部分集合とすると $\mathrm{MS}(a)^{\leq n} = \{[\beta,\mu-\beta] \mid \mu \in \mathfrak{S}_n\lambda\}$ が成り立つ。このとき $\mathrm{MS}(a)^{\leq n}$ に対応する部分圏 $\mathcal{H}_d(a)^{\leq n}$ は $\mathcal{H}_d(a)$ から自然に誘導されるアフィン最高ウェイト構造 $(P \twoheadrightarrow \widetilde{S} \twoheadrightarrow S \twoheadrightarrow L)$ をもつ。

定理 3.3 (荒川-鈴木 1998 + F.)**.** ウェイト $\beta,\lambda \in \Lambda$ が条件 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n > \beta_1 > \cdots > \beta_n$ を満たすとし、$d := \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i - \beta_i)$, $a = a(\beta,\lambda-\beta)$ とおく。このとき荒川-鈴木関手 $F_{\beta,d}$ は $\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda$ で完全であり、各 $\mu \in \mathfrak{S}_n\lambda$ について $F_{\beta,d}(L(\mu)) \cong L(\beta,\mu-\beta)$, $F_{\beta,d}(M(\mu)) \cong S(\beta,\mu-\beta)$, $F_{\beta,d}(\widetilde{M}(\mu)) \cong \widetilde{S}(\beta,\mu-\beta)$ が成り立つ。さらにもし各直既約射影加群 $P(\mu)$ の像 $F_{\beta,d}(P(\mu))$ の極大半単純商が単純ならば[10]、$F_{\beta,d}(P(\mu))$ は $\mathcal{H}_d(a)^{\leq n}$ の直既約射影加群 $P(\beta,\mu-\beta)$ に同型であり、したがって特に $F_{\beta,d}$ は 2 つのアフィン最高ウェイト圏 $\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda$ と $\mathcal{H}_d(a)^{\leq n}$ の間の圏同値を導く。[11] □

後半の主張の証明には BGG 相互律を用いる。β が非正則な場合にも被約標準加群、単純加群の対応の部分は制御できる。[7] において次が証明されている。

系 3.4 (荒川-鈴木 1998)**.** “Kazhdan-Lusztig 予想” と “Kazhdan-Lusztig 予想の p-進類似” は同値である。 □

参考文献

[1] T. Arakawa and T. Suzuki, *Duality between $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ and the degenerate affine Hecke algebra*, Journal of Algebra **209**, 288-304 (1998).

[2] J. Brundan, A. Kleshchev and P. McNamara, *Homological properties of finite type Khovanov-Lauda-Rouquier algebras*, Duke Math. J. **163** (2014), no.7, 1353-1404.

[3] P. Fiebig, *Centers and translation functors for the category $\mathcal{O}$ over Kac-Moody algebras*, Math. Z. **243**, 689-717 (2003)

[4] J. E. Humphreys, *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category $\mathcal{O}$*, GMS **94** (2008), AMS.

[5] S. Kato, *Poincare-Birkoff-Witt bases and Khovanov-Lauda-Rouquier algebras*, Duke Math. J. **163** (2014), no.3, 619-663.

[6] W. Soergel, *Kategorie $\mathcal{O}$, perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe* , J. Amer. Math **3** (1990), 421-445.

[7] T. Suzuki, *Rogawski's conjecture on the Jantzen filtration for the degenerate affine Hecke algebra of type A*, Represent. theory (Electronic Jour. of AMS) **2** (1998), 393-409.

[9] 多項式環の作用は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の Casimir 作用素を使って定義される。
[10] この仮定は常に正しいであろうと強く期待されます。
[11] 残念ながら、セミナー発表時よりも弱い結果に退化してしまっています。