有限位数の巡回同型を持つファイバー曲面のスロープについて

榎園　誠*

大阪大学大学院理学研究科数学専攻，2016 年 2 月

この度は第 13 回城崎新人セミナーに参加させていただき，有意義な時間を過ごせました．運営委員の方々に深く感謝申し上げます．

1　研究の背景と主結果

代数多様体は全て $\mathbb{C}$ 上で考える．$f\colon S \to B$ が種数 g のファイバー曲面であるとは，非特異な射影曲面 S から非特異な射影曲線 B への全射正則写像であって，一般ファイバーは種数 g の非特異射影曲線であるものである．ファイバー曲面の数値的な不変量として，次のようなものがある：

$$\begin{aligned} \chi_f &:= \chi(\mathcal{O}_S) - (g-1)(b-1), \\ K_f^2 &= K_S^2 - 8(g-1)(b-1), \\ e_f &:= e(S) - 4(g-1)(b-1). \end{aligned}$$

ここで，$K_f := K_S - f^*K_B$ は相対標準因子であり，b は底曲線 B の種数，$e(S)$ は S の（解析的な）位相のオイラー数である．これらの不変量に関して，次のことが知られている．但し，f は相対極小で $g \geq 2$ とする．

- (Noether) $12\chi_f = K_f^2 + e_f$.
- (Arakelov) K_f はネフである．
- (上野) $\chi_f \geq 0$ であり，$\chi_f = 0$ であることと f は局所自明，つまり正則ファイバー束であることは同値．
- (Segre) $e_f \geq 0$ であり，$e_f = 0$ であることと f のファイバーは全て非特異であることは同値．

本稿では断らない限り $f\colon S \to B$ は局所自明でない相対極小な種数 $g \geq 2$ のファイバー曲面であるとする．このとき上野の定理より $\chi_f > 0$ なので，二つの不変量の比 $\lambda_f := K_f^2/\chi_f$ が定義できる．これをファイバー曲面 f の**スロープ**という．上記の事実から $0 < \lambda_f \leq 12$ であることが分かる．$\lambda_f = 12$ のファイバー曲面 f は発見者の名前を冠し小平ファイバー曲面と呼ばれ，Segre の定理より f のファイバーは全て非特異である．スロープの下限については，次の不等式が知られている．

- (スロープ不等式 [6]) $\lambda_f \geq 4 - \dfrac{4}{g}$.

*m-enokizono@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

等号が成立するときは超楕円曲線を一般ファイバーに持つ場合（以下，超楕円ファイバー曲面と呼ぶ）に限り，非超楕円ファイバー曲面の場合はこの不等式は sharp ではない．そのため，非超楕円ファイバー曲面のスロープの下限に関し多くの研究がなされている．この方面の研究に関しては [4] に詳しい．さて，ファイバー曲面のスロープに関して，以下のことが信じられている．

問題 1.1 ファイバー曲面のスロープの下限は一般ファイバーの”特殊性”が大きいほど小さくなる．

曲線の” 特殊性” をはかる一つの不変量として，ゴナリティーというものがある：

定義 1.2 種数 $g \geq 2$ の非特異代数曲線 X に対し，

$$\mathrm{gon}(X) := \min\{\deg(\varphi) \mid \varphi\colon X \to \mathbb{P}^1 \text{ は全射正則写像 }\}$$

を X のゴナリティーという．

$2 \leq \mathrm{gon}(X) \leq [(g+3)/2]$ であり，X がモジュライの意味で一般ならば $\mathrm{gon}(X) = [(g+3)/2]$ である．また，$\mathrm{gon}(X) = 2$ であることと X は超楕円曲線であることは同値である．ファイバー曲面 $f\colon S \to B$ の非特異ファイバーのゴナリティーは有限個を除き等しいことが知られている．その値を $\mathrm{gon}(f)$ とかき，ファイバー曲面 f のゴナリティーと呼ぶ．上に書いた問題の一つの定式化として $\mathrm{gon}(f) = n$ となる種数 g のファイバー曲面のスロープの下限を n と g を用いて表すということが考えられるが，次の問題は未解決である：

問題 1.3 $\mathrm{gon}(f) = 3$ である種数 g のファイバー曲面 $f\colon S \to B$ は

$$\lambda_f \geq \frac{24(g-1)}{5g+1}$$

を満たす．

これは種数が低い場合や特異ファイバーが全て半安定な場合では正しいことが知られている [5]．ファイバー曲面 $f\colon S \to B$ を底曲線 B の関数体上の曲線とみれば，$\mathrm{gon}(f) = n$ である種数 g のファイバー曲面を考えるのに，線職面 $W \to B$ 上の n 次の分岐被覆 $S' \to W$ から（特異点解消と(-1) 曲線の縮約により）得られるファイバー曲面 $f\colon S \to B$ を考えることは自然である．しかし一般に 3 次以上の分岐被覆を考えるのは難しい．そこで最も簡単な n 次の（単純）巡回被覆の場合を考えてみる．

定義 1.4 種数 g のファイバー曲面 $f\colon S \to B$ が (g, h, n) 型の **primitive cyclic covering fibration** であるとは，相対極小とは限らない種数 $h \geq 0$ のファイバー曲面 $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{W} \to B$ と n 次の巡回分岐被覆 $\widetilde{\theta}\colon \widetilde{S} \to \widetilde{W}$ があって，f が $\widetilde{f} := \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\theta}$ の相対極小モデルであることとする．ここで，$\widetilde{\theta}$ の分岐因子 $\widetilde{R}$ は非特異で，$\exists L \in \mathrm{Pic}(\widetilde{W})$ *s.t.* $\widetilde{R} \in |nL|$, $\widetilde{S} = \mathrm{Spec}_{\widetilde{W}}\left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}_{\widetilde{W}}(-iL)\right)$ と仮定する．

注意 1.5 (1) $\widetilde{\theta}\colon \widetilde{S} \to \widetilde{W}$ を一般ファイバーに制限した曲線の間の n 次巡回被覆の分岐点の個数を r とすると，これは n の倍数であり，Hurwitz の公式より次を満たす：

$$r = \frac{2(g-1-n(h-1))}{n-1}.$$

(2) 種数 g の超楕円ファイバー曲面は $(g, 0, 2)$ 型の primitive cyclic covering fibration であり，逆も自明に正しい．

(3) 小平ファイバー曲面の具体例（小平 [3]，Kas [2]）は，種数が 2 以上である 2 曲線の直積の巡回分岐被覆であり，primitive cyclic covering fibration である．

すると，このクラスのファイバー曲面に対しスロープの下限を決定することができた．以下が主定理である．

定理 1.6 ([1]) $f\colon S \to B$ を (g,h,n) 型の primitive cyclic covering fibration とする．$h \geq 1$ かつ $g \geq (2n-1)(2hn+n-1)/(n+1)$ とすると，

$$\lambda_f \geq \lambda_{g,h,n} := \frac{24(n-1)(g-1)}{2(2n-1)(g-1)-n(n+1)(h-1)}$$

が成立する．

注意 1.7 $\lambda_{g,h,n}$ は h, n に関し単調増加であり，$\lambda_{g,0,2} = 4(g-1)/g$ はスロープ不等式の下限に一致する．$\lambda_{g,0,3} = 24(g-1)/(5g+1)$ であり，問題 1.3 は $(g,0,3)$ 型の primitive cyclic covering fibration に関しては正しい．

例 1.8 $r := 2(g-1-n(h-1))/(n-1) \in n\mathbb{Z}_{>0}$ を満たす任意の整数 $g \geq 2$, $h \geq 0$, $n \geq 2$ に対し，(g,h,n) 型の primitive cyclic covering fibration $f\colon S \to B$ で定理 1.6 のスロープ不等式の等号が成立する例を構成する．B, Γ をそれぞれ種数 b, h の非特異な射影曲線とし，δ_1, δ_2 をそれぞれ B, Γ 上の次数 N, $M := r/n$ の因子とする．N を十分大きくとることにより，因子 $\delta := p_1^*\delta_1 + p_2^*\delta_2$ は base point を持たないと仮定してよい．ここで，$p_1\colon B \times \Gamma \to B$, $p_2\colon B \times \Gamma \to \Gamma$ はそれぞれ第 1, 第 2 成分への射影である．このとき Bertini の定理より，非特異な有効因子 $R \in |n\delta|$ がとれ，これを分岐跡とする n 次の巡回分岐被覆 $\theta\colon S \to B \times \Gamma$ がとれる．こうして，primitive cyclic covering fibration $f := p_1 \circ \theta\colon S \to B$ を得る．これが求めるものである．実際，Hurwitz の公式を一般ファイバーへの制限 $\theta|_F\colon F \to \Gamma = \{t\} \times \Gamma$ に用いて f の一般ファイバーの種数が g であることが分かり，$K_{p_1} = p_2^*K_\Gamma$ と $\chi_{p_1} = 0$ から K_f^2, χ_f が

$$\begin{aligned}
K_f^2 &= (\theta^*(K_{p_1} + (n-1)\delta))^2 \\
&= n(p_1^*(n-1)\delta_1 + p_2^*((n-1)\delta_2 + K_\Gamma))^2 \\
&= 2n(n-1)N((n-1)M + 2(h-1)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_f &= n\chi_{p_1} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} j\delta(j\delta + K_{p_1}) \\
&= \frac{1}{4}n(n-1)\delta K_{p_1} + \frac{1}{12}n(n-1)(2n-1)\delta^2 \\
&= \frac{1}{4}n(n-1)N(2h-2) + \frac{1}{12}n(n-1)(2n-1)2NM \\
&= \frac{1}{6}n(n-1)N(3(h-1) + (2n-1)M)
\end{aligned}$$

と計算できる．従ってスロープの値は

$$\begin{aligned}
\frac{K_f^2}{\chi_f} &= \frac{12(2(h-1)+(n-1)M)}{3(h-1)+(2n-1)M} \\
&= \frac{24(n-1)(g-1)}{2(2n-1)(g-1)-n(n+1)(h-1)} \\
&= \lambda_{g,h,n}
\end{aligned}$$

となる．

参考文献

[1] M. Enokizono, Slopes of fibered surfaces with a finite cyclic automorphism. to appear in Michigan Math. J.

[2] A. Kas, On deformations of a certain type of irregular algebraic surface, Amer. J. Math. **90** (1968), 789–804.

[3] K. Kodaira, A certain type of irregular algebraic surfaces, J. Anal. Math. **19** (1967), 207–215.

[4] 今野　一宏，代数曲線束の地誌学，内田老舗圃

[5] Z. E. Stankova-Frenkel, Moduli of trigonal curves, J. Alg. Geom. **9** (2000), 607–662.

[6] G. Xiao, Fibred algebraic surfaces with low slope, Math. Ann. **276** (1987), 449-466.