測地線連分数の周期性について

戸次 鵬人 *

東京大学大学院数理科学研究科 修士 2 年 戸次 鵬人，2016 年 2 月

1 序

本講演では古典的連分数論における Lagrange の定理の、測地線を用いた一般化の研究とそれによって得られた結果について発表した。

古典的な連分数論において実数 α は以下の様に有限あるいは無限連分数に展開される。

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots}} = [a_0, a_1, \dots] \quad (a_0 \in \mathbb{Z},\ a_k \in \mathbb{N}_{>0} \text{ for } k \geq 1).$$

このとき、$p_k/q_k = [a_0, a_1, \dots, a_k]$（$p_k \in \mathbb{Z}, q_k \in \mathbb{N}_{>0}$ ：互いに素）を α の k 番目の近似分数と呼ぶ。本研究の動機は、連分数展開の周期性に関する次の Lagrange の定理の一般化である。

定理 1.1 (Lagrange's theorem)**.**

(i) 実数 α について、その連分数展開が周期的になる事と実二次無理数である事は同値。

(ii) α を実二次無理数とし、連分数展開 $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$ が純周期的である、すなわち、ある $l \in \mathbb{N}_{>0}$ が存在して、$a_{k+l} = a_k$ *for* $k \in \mathbb{N}$ が成立するとする。このとき、l を最小にとってあるとすると $u = p_{l-2}\alpha + p_{l-1}$ は α に付随する整環 $\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{Q}(\alpha) \mid x(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha) \subset \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha\}$ の基本単数となる。ただし、p_k/q_k は α の k 番目の近似分数とする。

定理 1.1 を一般化するにあたり、Sarnak [3] によって与えられた、次の定理 1.1 の幾何学的解釈を与えていると考えられる定理に注目する。

定理 1.2 (Geodesic Lagrange's theorem [3])**.** $\mathfrak{h}$ を通常の *Poincaré* 上半平面とする。

(i) 相異なる実数 α, β に対し、$\alpha, \beta \in \mathbb{R} = \partial\mathfrak{h}$ を結ぶ上半平面の測地線が、$SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{h}$ に射影したとき周期的になる、すなわち閉測地線となる事と α と β が互いに共役な実二次無理数である事は同値。

---

*bekki@ms.u-tokyo.ac.jp

(ii) このとき、$l \in \mathbb{R}_{>0}$ をその閉測地線の長さとすると、$u = \exp(l/2)$ は (α, β) に付随する整環 $\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta) \mid x(\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta) \subset \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta\}$ の基本単数を与える。

本研究においては、まず定理 1.2 が一般化される幾何学的枠組み "Heegner object"を構築し、その枠組みと元々Diophantus 近似の領域で Lagarias [2], Beukers [1] などによって考察されていた測地線連分数のアイデアを組み合わせることで、幾つかの代数体のクラスに対する定理 1.1 の一般化を得た。それらを簡単にまとめると、

(A) 相対単数群の階数が 1 であるような代数体の拡大 F/F' に対し、F の $\mathbb{Q}$-基底を "展開"する測地線連分数を構成し、その周期性と、周期が相対単数群を記述する事を示した。

(B) p を素数とし、体同型 $\mathbb{C} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定する。$\mathfrak{h} \subset \mathbb{C}$ を通常の Poincaré 上半平面とする。このとき、$z \in \mathfrak{h} \cap \mathbb{Q}_p$ を展開する $\{\infty, p\}$-連分数を構成し、虚二次無理数 $z \in \mathfrak{h} \cap \mathbb{Q}_p$ の $\{\infty, p\}$-連分数展開の周期性と、周期が z に付随する虚二次体の整環のノルム 1 基本 p-単数を与える事を示した。

本稿では、鍵となる Heegner object の構成とその周期性の結果（定理 1.2 の一般化）、測地線連分数のアルゴリズム、及び得られた定理 1.1 の一般化について述べる。

2 Heegner objects

実際には Heegner object は無限素点を含む有理数体の有限個の素点の集合 S に対して S-adélic に構成されるが、ここでは簡単のため $S = \{\infty\}$ (∞ は有理数体の唯一の無限素点) の場合についてのみ述べる。まずは、定理 1.2 における Poincaré 上半平面を一般化する $GL_n(\mathbb{R})$ の一般化上半空間を定義する。

定義 2.1 (一般化上半空間). $GL_n(\mathbb{R})$ の一般化上半空間 $\mathfrak{h}^n$ を次で定める。

$$\mathfrak{h}^n := GL_n(\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times O(n).$$

$A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{R})$ に対し、A が定める $\mathfrak{h}^n$ の類を $[A]$ あるいは $[a_{ij}]$ で表す。

以降、$\mathbb{R}$-ベクトル空間の同型 $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2; x + iy \mapsto (y, x)$ を固定し、しばしば同一視する。F を n 次代数体とし、$\sigma_1, \ldots, \sigma_{r_1}$ を F の実素点、$\sigma_{r_1+1}, \ldots, \sigma_{r_1+r_2}$ $(r := r_1 + r_2)$ を F の複素素点とする。また、F の素点 σ_i による完備化を $F_i = F_{\sigma_i}$ で表し、素点 σ_i と埋め込み $F \hookrightarrow F_i$ を同一視する。($F_i \simeq \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) for σ_i: 実素点 (resp. 複素素点).) $n_i := [F_i : \mathbb{R}]$ とおく。 このとき、次の自然な埋め込みが定まる。

$$\sigma : F \hookrightarrow F_\infty := F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \prod_i F_i = \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n.$$

ここで最後の同型は、初めに固定した $\mathbb{R}$-ベクトル空間の同型を使う。次に、$w_1, \ldots, w_n$ を F の $\mathbb{Q}$-基底とする。$w = {}^t(w_1, \ldots, w_n)$（^{t} は行列の転置を表す）とおく。

定義 2.2. F の $\mathbb{Q}$-基底 w に付随する Heegner object を次の写像で定める。

$$\varpi = \varpi_w : T^1 := (\prod_i \mathbb{R}_{>0})^1 \to \mathfrak{h}^n; (t_1, \cdots, t_r) \mapsto [t_1\sigma_1(w) \cdots t_r\sigma_r(w)].$$

ここで、 $(\prod_i \mathbb{R}_{>0})^1 := \{(t_1, \ldots, t_r) \in \mathbb{R}^r_{>0} | \prod_{i=1}^r t_i^{n_i} = 1\}$ であり、 固定した同一視 $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ によって複素成分は虚部と実部を横に並べて $(t_1\sigma_1(w) \cdots t_r\sigma_r(w)) \in GL_n(\mathbb{R})$ とみなす。行列の正則性は $\sigma(w) = {}^t(\sigma(w_1), \ldots, \sigma(w_n))$ が F_∞ の $\mathbb{R}$-基底をなすことに依る。また、前述の記法によって $[t_1\sigma_1(w) \cdots t_r\sigma_r(w)]$ は $(t_1\sigma_1(w) \cdots t_r\sigma_r(w))$ の定める $\mathfrak{h}^n$ の元である。

今、$\mathfrak{h}^n = GL_n(\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times O(n)$ には離散群 $SL_n(\mathbb{Z})$ が左から自然に作用しており、我々はこの作用に関する Heegner object ϖ の周期性、すなわち次の写像の周期性を考察する。

$$\pi \circ \varpi : T^1 \to SL_n(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{h}^n.$$

ただし $\pi : \mathfrak{h}^n \to SL_n(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{h}^n$ は自然な射影。以下、$\Gamma := SL_n(\mathbb{Z})$ とおく。

定義 2.3. 組 $(A, \rho) \in \Gamma \times T^1$ が Γ に対する ϖ の周期であるとは次を満たすことを言う。

$$A\varpi(t) = \varpi(\rho t) \ \ \forall t \in T^1.$$

このとき、単に $A \in \Gamma$ (resp. $\rho \in T^1$) についても、(A, ρ) が周期となる対応する ρ (resp. A) の存在を暗に含んで、ϖ の周期であるという。$\Gamma_\varpi \subset \Gamma$ (resp. $\Lambda_\varpi \subset T^1$) によって周期全体のなす群を表す。定め方より、$\pi \circ \varpi$ は商空間 $\Lambda_\varpi \backslash T^1$ を経由する。

これらの設定のもとで次の、定理 1.2 の一般化を示した。

定理 2.4. (i) $\Lambda_\varpi \backslash T^1$ はコンパクト。

(ii) $A \in \Gamma_\varpi$ とすると、A は w を固有ベクトルとして持ち、対応する固有値を $\varphi_w(A) \in F^\times$ とかく事にすると、写像

$$\varphi_w : \Gamma_\varpi \to F^\times; A \mapsto \varphi_w(A)$$

は単射群準同型であり、その像は w に付随する整環 $\mathcal{O}_w$ のノルム 1 単数群 $\mathcal{O}_w^1$ と一致する。ただし、$\mathcal{O}_w := \{x \in F \mid x(\mathbb{Z}w_1 + \cdots + \mathbb{Z}w_n) \subset \mathbb{Z}w_1 + \cdots + \mathbb{Z}w_n\}$, $\mathcal{O}_w^1 := \{x \in \mathcal{O}_w^\times \mid N_{F/\mathbb{Q}}x = 1\}$。

Remark. Heegner object と本質的に同じ対象は連分数論とは異なる領域の幾つかの先行研究においても見つけられ、まったく新しいというわけでは無い。一方、周期群 Γ_ϖ の考察（定理 2.4 (ii)）とそれが可能にする連分数論の一般化への応用は著者の知る限り無い。

3 測地線連分数

定理 2.4 によって、数論的に重要な対象である単数群 $\mathcal{O}_w^1$ が幾何学的に考察可能な Heegner object の周期群 Γ_ϖ と一致することが分かった。この節では、ϖ が 1 次元の場合に一般化上半空間 $\mathfrak{h}^n$ の幾何学を用いて具体的に周期群 Γ_ϖ を記述するアイデアを紹介する。記号は今までの通りとし、以下 Heegner object ϖ は 1 次元、すなわち $\varpi : T^1 \simeq \mathbb{R}_{>0} \to \mathfrak{h}^n$ とする。このとき、ϖ は $\mathfrak{h}^n$ に自然に定まる Riemann 計量に関して測地線であることが分かる。

$\mathcal{F} \subset \mathfrak{h}^n$ を離散群 Γ に関する “良い”基本領域とする。“良い”事の定義はここでは割愛する。

定義 3.1. Heegner object ϖ と基本領域 $\mathcal{F}$ に対し、列 $\{(A_k, B_k, \varpi_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ を以下のように定める。

- $u_0 := 1 \in \mathbb{R}_{>0}(\simeq T^1)$ とおき、$\varpi(u_0) \in B_0\mathcal{F}$ なる $B_0 \in \Gamma$ をとる。$\varpi_0 := B_0^{-1}\varpi$ とおく。
- $k \geq 0$ に対し、$u_k \in T^1, \varpi_k$ s.t. $\varpi_k(u_k) \in \mathcal{F}$ が与えられているとき、$(A_{k+1}, B_{k+1}, \varpi_{k+1})$ を次のようにとる。$t \in T^1 \simeq \mathbb{R}_{>0}$ を u_k から連続的に増大させていき、$t = t_k$ を境に $\varpi_k(t)$ が $\mathcal{F}$ から飛び出したとする。このとき、$t = t_k$ の近傍で $\varpi_k(t)$ が $\mathcal{F} \cap A_{k+1}\mathcal{F}$ に覆われる $A_{k+1} \in \Gamma$ をとる。$B_{k+1} := B_k A_{k+1}$, $\varpi_{k+1} := A_{k+1}^{-1}\varpi_k$ とおく。
- $k \leq 0$ に対しても t を減少させながら同様に定める。

命題 3.2. "良い"基本領域に対してこのアルゴリズムは *well-defined*。これを w あるいは ϖ の測地線連分数展開と呼ぶ。

Remark. 測地線連分数の定義や議論は概ね Lagarias, Beukers のものに従っている。ただし、元のままでは Heegner objects に適用できなかったため、主に基本領域の "良さ"の定義を改良して、議論を一般化した。

4 主結果

定理 2.4 を用いて測地線連分数展開の周期性に関する次の結果を示した。

定理 4.1 (Rank one generalized Lagrange's theorem)**.**
$\{(A_k, B_k, \varpi_k)\}_k$ を w に付随する *Heegner object* ϖ の測地線連分数展開とする。

(i) ある $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$, $k_0 < k_1$ 及び $\rho \in \mathbb{R}_{>1}$ が存在して、$\varpi_{k_0}(t) = \varpi_{k_1}(\rho t)\ \forall t$ が成立する。

(ii) このとき、$B_{k_1}B_{k_0}^{-1} \in \Gamma_\varpi$ であり、$\epsilon := \varphi_w(B_{k_1}B_{k_0}^{-1}) \in F^\times$ は $\mathcal{O}_w^1$ の *non-torsion* 元を与える。特に、ϵ は $\mathcal{O}_w^1$ の指数有限部分群を生成する。

Remark. Heegner object ϖ が 1 次元であるためには $r = 2$ である事が必要十分なので、定理 4.1 は F が、実二次体、複素三次体、総虚四次体の場合への定理 1.1 の一般化を与えている。

5 補遺

前述のように、Heegner object の枠組みは有限個の有限素点も含めて adélic に構成することができる。また、$\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ の二次指標 χ に対して、Heegner object の χ-component を定義し、これに対しても定理 2.4 と同等の事実を示すことができる。その結果として、上述の場合も含めて以下の場合への定理 1.1 の拡張を得ることができた。

(a1) 実二次体、複素三次体、総虚四次体と、その単数群。

(a2) 総実体上の二次拡大体でちょうど 2 つの実素点を持つものと、その相対単数群

(a3) ちょうど 1 つの複素素点を持つ代数体上の二次拡大で総虚なものと、その相対単数群。

(b) 虚二次体と分裂する素数 p に対するノルム 1 p-単数群。

(a1)〜(a3) は以下のようにまとめることもできる。

(a) 代数体の拡大でその相対単数群の階数が 1 であるものと、その相対単数群。

6 謝辞

この度は第 13 回城崎新人セミナーに参加して、大変有意義な時間を過ごすことができました。参加、講演の機会をくださった運営委員の皆様、たくさんの興味深い議論、意見を交わしてくださった参加者の皆様に感謝いたします。

参考文献

[1] F. Beukers, Geodesic continued fractions and LLL, Indag. Math. (N.S.) **25** (2014), no. 4, 632–645.

[2] J. C. Lagarias, Geodesic multidimensional continued fractions, Proc. London Math. Soc. (3) **69** (1994), no. 3, 464–488.

[3] P. Sarnak, Class numbers of indefinite binary quadratic forms, J. Number Theory **15** (1982), no. 2, 229–247.