Ehrhart 多項式の係数の符号に関する分類問題

土谷 昭善 *

大阪大学　情報科学研究科，2016 年 2 月

1　Ehrhart 多項式

空間 $\mathbb{R}^d$ の点 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$ は $\alpha_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq d$ のとき**整数点**と呼ばれる。凸多面体が整であるとはその任意の頂点が整数点であるときにいう。$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体とする。任意の正整数 n について、

$$n\mathcal{P} := \{n\boldsymbol{\alpha} | \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}\}$$

と置く。$n\mathcal{P}$ に含まれる整数点の個数を $i(\mathcal{P}, n)$ と表す。つまり

$$i(\mathcal{P}, n) := |n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d|$$

である。

この時、次のようなことが知られている。

- $i(\mathcal{P}, n)$ は、n に関する d 次多項式であり、定数項は常に 1 である。

- $i(\mathcal{P}, n)$ の n^d における係数は $\mathrm{vol}(\mathcal{P})$、$n^{d-1}$ における係数は $\frac{\mathrm{vol}(\partial\mathcal{P})}{2}$ と一致する。

この多項式 $i(\mathcal{P}, n)$ を $\mathcal{P}$ の **Ehrhart 多項式**と呼ぶ。Ehrhart 多項式に関する基本的なことは [1] に書いてある。

例 1. $\mathcal{P} := \{(x_1, \ldots, x_d) : 0 \leq x_i \leq 1, \text{ for all } i\} = [0, 1]^d$ とする。このとき

$$i(\mathcal{P}, n) = (n + 1)^d$$

となる。

例 2. $\mathcal{P} := \mathrm{conv}(\{\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d\})$ とする。ここで $\mathbf{0}$ は $\mathbb{R}^d$ の原点、$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ は $\mathbb{R}^d$ の標準基底である。このとき

$$i(\mathcal{P}, n) = \binom{n+d}{d}$$

となる。

一般に Ehrhart 多項式の計算は非常に複雑で、高次元のものや一般次元のものを計算することは困難である。

*a-tsuchiya@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

2　負の係数を持つ Ehrhart 多項式

Ehrhart 多項式の性質から、d 次元整凸多面体 $\mathcal{P}$ に付随する Ehrhart 多項式の定数項、n^d 及び n^{d-1} の係数は常に正である。一方 $n, \ldots, n^{d-2}$ の係数は負になる可能性がある。

例 3. 正の整数 m に対して、

$$\mathcal{P}_m := \mathrm{conv}(\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(1,1,m)\}) \subset \mathbb{R}^3$$

とする。このとき

$$i(\mathcal{P}_m, n) = \frac{m}{6}n^3 + n^2 + \frac{12-m}{6}n + 1$$

となる。よって $m \geq 13$ ならば $i(\mathcal{P}_m, n)$ は負の係数を持つ。

このように負の係数を持つ Ehrhart 多項式の存在するが、この例以外にそのような例はほとんど知られていない。負の係数を持つ Ehrhart 多項式に関する結果もほとんどなかった。そこで次の問題を考えた。

問題 4. (1) 任意の次元 $d \geq 3$ に対して、負の係数を持つ Ehrhart 多項式は存在するか。
(2) 任意の次元 $d \geq 3$、及び任意の整数 $1 \leq j \leq d-2$ に対して、n^j の係数が負となる Ehrhart 多項式は存在するか。

この問題に対する結果が次の定理である。

定理 5 ([3])**.** 任意の次元 $d \geq 3$ に対して、d 次元整凸多面体 $\mathcal{P}$ で $i(\mathcal{P}, n)$ の $n, \ldots, n^{d-2}$ の係数すべてが負となるものが存在する。

例 6. $\mathcal{P}$ を次の頂点からなる 5 次元整凸多面体とする。

$$(0,0,0,0,0),(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(1,1,50,0,0)$$

$$(0,0,0,2,0),(1,0,0,2,0),(0,1,0,2,0),(1,1,50,2,0)$$

$$(0,0,0,0,2),(1,0,0,0,2),(0,1,0,0,2),(1,1,50,0,2)$$

$$(0,0,0,2,2),(1,0,0,2,2),(0,1,0,2,2),(1,1,50,2,2)$$

このとき、

$$i(\mathcal{P}, n) = \frac{100}{3}n^5 + \frac{112}{3}n^4 - 13t^3 - \frac{61}{3}n^2 - \frac{7}{3}n + 1$$

となる。

この定理により問題 4. は完全に解決された。

3　Ehrhart 多項式の係数の符号パターン

d 次元整凸多面体 $\mathcal{P}$ に対して、

$$S(\mathcal{P}) := \{j : i(\mathcal{P}, n) \text{ の } n^j \text{の係数が負 }\} \subset \{1, \ldots, d-2\}$$

と定義する。

定理 5 によって、Ehrhart 多項式の 1 次から $d-2$ 次までの係数は、負になりえることが分かった。そこで次の以下の問題を考えた。

問題 7. 任意の次元 $d \geq 3$、及び $\{1, \ldots, d-2\}$ の任意の部分集合 S に対して、d 次元整凸多面体で $S(\mathcal{P}) = S$ となるものが存在するか。

この問題に対する部分的問題が以下の定理である。

定理 8. 任意の次元 $d \geq 3$、及び $\{1, \ldots, d-2\}$ の任意の部分集合 S に対して、$|S| \leq 3$ であれば、d 次元整凸多面体で $S(\mathcal{P}) = S$ となるものが存在する。

$|S| = 1$ の場合は [3] で証明され、$|S| = 2, 3$ の場合は [5] で証明されている。次の例は、この定理の $|S| = 3$ の場合を証明するのに必要だったものである。計算機を用いてある程度条件を付け、ランダムに計算してみたが、数千万個から 1 億個ほど計算しても見つからなかった。ある程度の計算経験から自力で構成したのだが 1 時間ほどで構成することが出来た。負の係数を Ehrhart 多項式がほとんど知られていないという理由がわかる。

例 9. $\mathcal{P}$ を次の頂点からなる 7 次元整凸多面体とする。

$$(0,0,0,0,0,0,0), (1,0,0,0,0,0,0), (0,1,0,0,0,0,0), (0,0,1,0,0,0,0), (0,0,0,1,0,0,0)$$

$$(0,0,0,0,1,0,0), (2,6,13,1,8,138,0), (3,3,6,9,14,16,167)$$

このとき

$$i(\mathcal{P}, n) = \frac{3841}{340}n^7 + \frac{19}{180}n^6 - \frac{13}{120}n^5 + \frac{11}{36}n^4 - \frac{19}{60}n^3 + \frac{233}{90}n^2 - \frac{31}{210}n + 1$$

となる。

また低次元から完全分類も行っている。

命題 10. 次元 $3 \leq d \leq 7$、及び $\{1, \ldots, d-2\}$ の任意の部分集合 S に対して、d 次元整凸多面体で $S(\mathcal{P}) = S$ となるものが存在する。

これも $3 \leq d \leq 6$ の場合は [3] で証明され、$d = 7$ の場合は [5] で証明されている。

ここまで係数の符合は正と負のものしか考えていなかったが、当然係数が 0 となる Ehrhart 多項式も存在する。例 3. の $\mathcal{P}_m$ に対して、$m = 12$ のときがその例である。しかし、係数が 0 となる Ehrhart 多項式の例は負の係数の時以上に知られていない。今の所、わかっている結果は次の定理程度である。

定理 11 ([5])**.** 任意の次元 d、及び任意の整数 $1 \leq j \leq d-2$ に対して、ある d 次元整凸多面体 $\mathcal{P}$ で $i(\mathcal{P}, n)$ の n^j の係数が 0 となるものが存在する。

0 の係数を持つ Ehrhart 多項式はかなり自由度が低いので 2 個以上 0 の係数を持つ Ehrhart 多項式は存在しないと予想していた。しかし、最近になって以下の例が発見された。

例 12. $\mathcal{P}$ を次の頂点からなる 4 次元整凸多面体とする。

$$(0,0,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (1,1,18,0)$$

$$(0,0,0,1), (1,0,0,1), (0,1,0,1), (1,1,18,1)$$

このとき、

$$i(\mathcal{P}, n) = 3n^4 + 4n^3 + 1$$

となる。

これを用いると、4 の倍数の次元の時は 1 次と 2 次の係数が 0 となる Ehrhart 多項式を構成することができるが、複数の係数が 0 となる Ehrhart 多項式はこれ以外に知られていない。

4 Hilbert 多項式

体 k に対して、$R = \oplus_{i \geq 0} R_i$ を有限生成次数付き k 代数とする。このとき

$$H(R; i) := \dim_k R_i$$

は R の **Hilbert 関数**と呼ばれる。Ehrhart 多項式はある有限生成次数付き k 代数の Hilbert 関数と一致することが知られている。Hilbert 関数は一般的には多項式にならないが次のことが知られている。

命題 13. 標準的、つまり次数 1 の元で生成される有限生成次数付き k 代数 $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$ に対して、ある有理数係数の多項式 $P_R(x) \in \mathbb{Q}[x]$ とある正の整数 N で、$i \geq N$ ならば $H(R, i) = P_R(i)$ となるものが存在する。

この $P_R(x)$ を R の **Hilbert 多項式**と呼ぶ。Hilbert 多項式に関することは [2] を参照していただきたい。Ehrhart 多項式と同様に Hilbert 多項式の係数の符合パターンの分類も自然と考えられる問題である。

$P_R(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ をある標準的有限生成次数付き k 代数 R の Hilbert 多項式とする。このとき整数の列

$$S(R) := (\mathrm{sign}(a_0), \ldots, \mathrm{sign}(a_{d-1})) \in \{-1, 0, 1\}^d$$

を定義する。ここで、実数 a に対して

$$\mathrm{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & \text{if } x < 0, \\ 0 & \text{if } x = 0, \\ 1 & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

である。また Hilbert 多項式の最高次の係数は常に正となることに注意する。

Hilbert 多項式について以下の問題を考える。

問題 14. 任意の次数 $d \geq 1$ 及び任意の $s \in \{-1, 0, 1\}^d$ に対してある標準的有限生成次数付き k 代数 R で $S(R) = s$ となるものが存在するか。

この問題の結果が次の定理の系により得られる。

定理 15 ([4])**.** 任意の正の整数 d と任意の d 個の整数 $a_0, \ldots, a_{d-1}$ に対して、ある正の整数 N で任意の整数 $a \geq N$ に対して $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{d-1} x^{d-1} + a x^d$ が Hilbert 多項式となるものが存在する。

よって Hilbert 多項式の場合、係数の符合パターンの分類は完全に解決された。

参考文献

[1] M. Beck and S. Robins, Computing the continuous discretely, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2007.

[2] F. Brenti, Hilbert polynomials in Combinatorics, *J. Alg. Comb.* **7**(1998), 127–156.

[3] T. Hibi, A. Higashitani, A. Tsuchiya and K. Yoshida, Ehrhart polynomials with negative coefficients, arXiv:1312.7049.

[4] A. Tsuchiya, On the sign patterns of the coefficients of Hilbert polynomials, arXiv:1603.06444.

[5] A. Tsuchiya, On the sign patterns of the coefficients of Ehrhart polynomials, preparation.