超平面配置の自由性と組み合わせ論

阿部　拓郎 *

京都大学大学院工学研究科機械理工学専攻，2016 年 2 月

1　超平面配置とその代数

V を体 $\mathbb{K}$ 上の ℓ 次元ベクトル空間, $S=\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_\ell]$ をその座標環とする. $\mathcal{A}$ が V 中の超平面配置であるとは, $\mathcal{A}$ が V 中の, 原点を通る超平面の有限族であるときにいう. 断らない限り, $\cap_{H\in\mathcal{A}}H=\{0\}$ を仮定する. 定義から, $\mathcal{A}\ni H$ を定義する線形形式が定まる. それを一つ固定して $\alpha_H\in V^*$ と表す. $\mathrm{Der}S:=\oplus_{i=1}^{\ell}S\partial_{x_i}$ で $\mathbb{K}$ 線形な S 導分加群を表す. このとき超平面配置の代数として以下の加群を定義する,

定義 1.1

$$D(\mathcal{A}):=\{\theta\in\mathrm{Der}\,S\mid\theta(\alpha_H)\in S\alpha_H\ (\forall H\in\mathcal{A})\}$$

を $\mathcal{A}$ の対数的ベクトル場とよぶ.

対数的ベクトル場は一般には反射的加群となる. すなわち自然に存在する写像 $D(\mathcal{A})\to(D(\mathcal{A})^*)^*$ が同型となる. これはねじれのない加群よりは強く, 自由加群よりは弱い条件である. 実際, 一般に対数的ベクトル場は自由加群ではない. よって対数的ベクトル場が自由加群であるとき, $\mathcal{A}$ を自由配置と呼ぶ. $D(\mathcal{A})$ は定義から明らかに次数付加群のため, 自由配置 $\mathcal{A}$ の対数的ベクトル場には斉次基底 $\theta_1,\ldots,\theta_\ell$ がとれる. 階数が ℓ であることは, ゼロイデアルでの局所化を包含関係式

$$\mathrm{Der}\,S\supset D(\mathcal{A})\supset(\prod_{H\in\mathcal{A}}\alpha_H)\,\mathrm{Der}\,S$$

に当てはめることでわかる. このとき自由配置 $\mathcal{A}$ の指数 $\exp(\mathcal{A})$ を, $(\deg\theta_1,\ldots,\deg\theta_\ell)$ で定義する. ここで斉次な $\theta\in\mathrm{Der}\,S$ に対して $\deg\theta:=\deg\theta(\alpha)$ $(\forall\alpha\in V^*,\ \theta(\alpha)\neq 0)$ たる多項式次数で定義する. 斉次もよって, この値が常に一致するものとして定義される.

この定義は技巧的に見えるかもしれないが, その祖は超平面配置研究の始祖たるワイル配置の不変式論にある. 簡単に復習しよう. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ とし, W をワイル群とする. もしワイル群やルート系に不慣れな方は, W が ℓ 次対称群の場合を思い描いて頂いてよい. すると W の V への作用は自然に S へと拡張されるので, その不変部分環 $R:=S^W$ が考えられる. Chevalley の有名な結果より, $R=\mathbb{R}[P_1,\ldots,P_\ell]$ となるような $\mathbb{R}$ 上代数的独立な斉次多項式 $P_1,\ldots,P_\ell$ が存在する（基本不変式）. これらの取り方は, 次数が最も小さいもの以外には任意性があるが, その次数は基本不変式の取り方によらないことが知られている. このとき W の指数 $\exp(W)$ は, $(\deg P_1-1,\ldots,\deg P_\ell-1)$ で定義され

*2016 年 3 月より九州大学マスフォアインダストリ研究所へ異動. abe@imi.kyushu-u.ac.jp

る．例えば W が対称群の場合, 基本不変式はまさに基本対称式であるから, $\exp(W) = (0, 1, \ldots, \ell-1)$ である．

さて, ワイル群は位数 2 の鏡映で生成される（対称群の場合はいわゆる互換）, これをベクトル空間への作用の観点から考えると, 線形な超平面を鏡映面とする折り返しという幾何学的操作にあたる．これらの事実を合わせれば, ワイル群を考えることと, ワイル群に含まれる全ての鏡映の鏡映面の集合 $\mathcal{A}_W$ を考えることは同じである．これはまさにルート系の立場であるが, この $\mathcal{A}_W$ を W に対するワイル配置と呼ぶ．ここまで来れば想像がつくと思うが, このとき以下が成立する：

定理 1.2 (斎藤恭司, [S])
A_W は自由配置であり, $\exp(\mathcal{A}_W) = \exp(W)$.

証明は具体的に自由基底を構成することで行われ, そこでは基本不変式が活躍するがあまり深くは踏み込まないこととする．興味を持たれた方は, [OT] などをご参照頂きたい．超平面配置研究の基本的かつ網羅的な教科書である．

よってこの, 群作用の鏡映面全体という枠組みを取っ払い, 超平面の有限集合全てを, 言わば "群作用を持たない鏡映面全体" ととらえることで一般化したものが超平面配置である．故にまずはワイル配置やワイル群の場合のよい性質がどれくらい成立するかに興味がある．その典型といえるのが指数である．例えばワイル配置の場合, 以下が知られている．

定理 1.3
ユークリッド空間あるいは複素ベクトル空間中の超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して $M(\mathcal{A}) := (V \setminus \cup_{H \in \mathcal{A}} H) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ とする．このとき

$$Poin(M(\mathcal{A}_W); t) := \sum_{i=0}^{\ell} \dim H^i(M(\mathcal{A}_W), \mathbb{C}) t^i = \prod_{i=1}^{\ell} (1 + d_i t),$$

ここで $(d_1, \ldots, d_\ell)$ はワイル群 W の指数.

つまりワイル群の指数は, ワイル配置の補空間のポアンカレ多項式あるいはベッチ数を記述している．では, 指数が定義できる配置としてワイル配置あるいはワイル群の一般化とみなせる自由配置についてはどうだろうか．予想が付くかもしれないが（そして実際はかなり衝撃的な事実であるが）, 全く同じ以下の主張が成立する：

定理 1.4 (寺尾宏明, [T])
$\mathcal{A}$ が指数 $(d_1, \ldots, d_\ell)$ の複素あるいは実ベクトル空間中の自由配置であれば,

$$Poin(M(\mathcal{A}); t) = \prod_{i=1}^{\ell} (1 + d_i t),$$

が成立.

これにより, 一般に群作用がないため不変部分環のような自然かつ素性のよい対応する代数が存在しない超平面配置に対しては, 対数的ベクトル場を考えることで非常に興味深い性質が導かれることがわかる．超平面配置の代数学は, 寺尾の分解定理と呼ばれる定理 1.4 をその始祖とし, 今日まで発展を続けている．実際, 対数的ベクトル場は, 超平面配置の代数を代数幾何・位相幾何・組み合わせ論と結ぶ架け橋の役割を果たす．近年は特に, [Y1] を契機とした, 代数幾何的手法を用いた発展が目覚ましい（このあたりについては例えば [Y2] を参照）．例えば, 以下のような非常に基本的かつ不思議な性質も, 対数的ベクトル場の代数幾何的理解を通して証明される．

定理 1.5 ([A1])
$\mathcal{A}$ を $\mathbb{R}^2$ 中のアフィン直線の有限族とする．$Poin(M(\mathcal{A});t)=(1+at)(1+bt)$ とおこう．ここで $a\leq b$ がどちらも実数であると仮定する．このとき任意の直線 $L\subset\mathbb{R}^2$ に対して（$\mathcal{A}$ に含まれていてもいなくてもよい），$n_L:=|\{L\cap H\neq\emptyset \mid H\in\mathcal{A},\ L\neq H\}|$ とすると, $a<n_L<b$ たる L は存在しない．言い換えると, $\chi(\mathcal{A};t):=Poin(M(\mathcal{A});-t^{-1})t^2=(t-a)(t-b)$ と置いた際, $\chi(\mathcal{A};n_L)\geq 0$ となる（この定式化では, a,b はどのような値でもよい). 更に, $\chi(\mathcal{A};n_L)=0$ たる L が存在すれば, $\mathcal{A}$ の錐化 $c\mathcal{A}$ は指数 $(1,a,b)$ の自由配置となる．

定理 1.5 は非常にシンプルな主張であるため, 既に別の視点から証明されているあるいは知られていてもおかしくないと思われるが, 発表から三年たってもそういった指摘がないため, どうやら自由配置を用いた [A1] での証明が初めてらしい．代数幾何を用いない, 組み合わせ論的な, それも数え上げを用いた証明が存在すべきと考えるので, 興味のある方はトライしてみると面白いかもしれない．

2 自由性と組み合わせ論

さて, §1 では自由性の性質とそれがもたらす超平面配置の諸性質を見てきた．この章では逆に, 自由性はどのような性質から決まるかを考えてみよう．そのための基本的な道具は超平面配置の組み合わせ論である．

定義 2.1
(1) $L(\mathcal{A}):=\{\cap_{H\in\mathcal{B}}H \mid B\subset\mathcal{A}\}$ を $\mathcal{A}$ の交差束という．交差束には逆包含関係で半順序が入り, 半順序集合となる．交差束上にメビウス関数 μ を, $\mu(V):=1$, $\mu(X):=-\sum_{X\subsetneq Y\subset V, Y\in L(\mathcal{A})}\mu(Y)$ ($L(\mathcal{A})\ni X\subsetneq V$) という関係で定める．
(2)
$$\pi(\mathcal{A};t):=\sum_{X\in L(\mathcal{A})}\mu(X)(-t)^{\operatorname{codim}X},\ \chi(\mathcal{A};t):=\sum_{X\in L(\mathcal{A})}\mu(X)t^{\dim X}$$
と定義する．前者を $\mathcal{A}$ のポアンカレ多項式, 後者を特性多項式と呼ぶ．

交差束は超平面配置の交わり方の情報を保存するものであり, 超平面配置の組み合わせ論的情報といわれる．超平面配置に関する基本的かつ安直にできる問題設定として, 超平面配置のどのような性質が組み合わせ論的に決まるか, というものがある．組み合わせ論的情報は非常に弱いもののため, ほとんどのものは決まらないように思われるかもしれないが, 実は以下の定理が存在する．

定理 2.2 (Orlik-Solomon, [OS])
$\mathbb{K}=\mathcal{C}$ とする．このとき $M(\mathcal{A})$ のコホモロジー環 $H^*(M(\mathcal{A}),\mathbb{Z})$ は, 積構造も含めて $L(\mathcal{A})$ にのみ依存する．その系として,
$$Poin(M(\mathcal{A});t)=\pi(\mathcal{A};t).$$

定理 2.2 は, $L(\mathcal{A})$ の情報のみを用いて Orlik-Solomon 代数と呼ばれる代数を構成し, それがコホモロジー環と環同型となることを証明するという方法で示される．このように非常に重要な構造が組み合わせ論にのみ依存することが知られており, ” 超平面配置のどのような性質が性質が組み合わせ論的であるか “, という問題設定はやはり重要かつ興味深いものである．とはいえ, 組み合わせ論的でないものも多く, 例えば $M(\mathcal{A})$ の基本群は組み合わせ論的でないことが知られている．

さて, 以上を踏まえて以下の予想を考えよう：

予想 2.3 (寺尾予想, 1981)
$\mathcal{A}$ の自由性は $L(\mathcal{A})$ にのみ依存して決まる．即ち二つの超平面配置 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ で, 半順序集合間の同型 $L(\mathcal{A}) \simeq L(\mathcal{B})$ が存在するペアを考えたとき, $\mathcal{A}$ が自由ならば $\mathcal{B}$ も自由.

これは実は予想としてではなく, ” 問題 “として寺尾により提出されたものであるが, 実に 35 年の間, 証明されることも反例が見つかることもないまま過ぎている．$\ell = 2$ の場合は正しいこと, というか全ての配置が自由なことが簡単にわかるので, 最初に問題となるケースは $\ell = 3$ の場合であるが, この場合ですら本質的な進展はない．計算機を使っていろいろな実験が進められているが, わかっていることは $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ で $\ell = 3$ ならば, $|\mathcal{A}| \leq 12$ で寺尾予想は正しい, という結果くらいであり（[WY], [FV], [ACKN] などを参照）, 解決には極めて遠い.

寺尾予想に対するアプローチの一つとして, 剰余的自由配置が最近の結果として存在する．以下, それを紹介するための準備を行う.

定義 2.4
超平面配置 $\mathcal{A}$ と $X \in L(A)$ に対して,

$$\mathcal{A}_X := \{H \in \mathcal{A} \mid X \subset H\}, \ \mathcal{A}^X := \{H \cap X \mid H \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_X\}$$

で定義する．前者を X での局所化, 後者を X への制限と呼ぶ.

定理 2.5 ([A2], 剰余定理)
ある $H \in \mathcal{A}$ で, $\pi(\mathcal{A}^H; t) \mid \pi(\mathcal{A}; t)$ かつ $\mathcal{A}^H$ が自由であるものが存在すれば, $\mathcal{A}$ も自由.

剰余定理は次元に関する帰納法を働かせるのに極めて有効である．つまり組み合わせ論的に定まる以下の集合が意味を持つ；

定義 2.6

$$X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_\ell$$

が $\mathcal{A}$ の旗であるとは, $X_i \in L(\mathcal{A}),\ \operatorname{codim} X = i\ (i = 0, \ldots, \ell)$ である時に言う．$\mathcal{A}$ の旗 $\{X_i\}$ が剰余旗であるとは, $\pi(\mathcal{A}^{X_i}; t) \mid \pi(\mathcal{A}^{X_{i-1}}; t)\ (i = 1, \ldots, \ell)$ たるときにいう.

二次元の超平面配置はすべて自由であることが簡単にわかるため, 以下が定理 2.5 を繰り返し用いることで直ちにわかる.

定理 2.7 ([A2])
$\mathcal{A}$ が剰余旗を持てば $\mathcal{A}$ は自由．また, $\mathcal{A}$ が剰余旗を持つかどうかは組み合わせ論的に決まる.

剰余旗を持つ配置を剰余的自由配置と呼ぶ．剰余的自由配置は, これまでに知られていた寺尾予想の成立する自由配置のカテゴリを拡張するものであり, かつ旗への制限に対応する配置のポアンカレ多項式の情報しか使わず自由性がわかるという点で極めて興味深い．無論, 剰余的でない自由配置も存在するため寺尾予想の解決には程遠いが, 思っていたより自由性は組み合わせ論的であるという印象を, 定理 2.7 からは受ける.

逆を言えば, 定理 2.7 は交差束 $L(\mathcal{A})$ のうちのほんの一部, しかも数値的なものしか用いておらず（それでも自由性がかなりわかるところが面白いわけであるが）, $L(\mathcal{A})$ の情報をより詳細に用いた自由性判定法を見つけることが, 今後の自由性研究の一つの鍵になると考えられる.

参考文献

[A1] T. Abe, Roots of characteristic polynomials and intersection points of line arrangements. *J. Singularities*, Vol. 8 (2014), pp100–117.

[A2] T. Abe, Divisionally free arrangements of hyperplanes. *Invent. Math.* to appear. DOI:10.1007/s00222-015-0615-7

[ACKN] T. Abe, M. Cuntz, H. Kawanoue and T. Nozawa, Non-recursive freeness and non-rigidity of plane arrangements. *Discrete Math.* to appear. arXiv:1411.3351.

[FV] D. Faenzi and J. Vallès, Logarithmic bundles and line arrangements, an approach via the standard construction. *J. London Math. Soc.* Vol. 90 (2014), no. 3, pp675-694

[OS] P. Orlik and L. Solomon, Combinatorics and topology of complements of hyperplanes, *Invent. Math.* Vol. 56 (1980), no. 2, pp167–189.

[OT] P. Orlik and H.Terao, *Arrangements of hyperplanes*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **300**. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[S] K. Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math,* Vol 27 (1980), no. 2, pp265–291.

[T] H. Terao, Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shephard-Todd-Brieskorn formula. *Invent. Math.* Vol. 63 (1981), pp159–179.

[WY] M. Wakefield and S. Yuzvinsky, Derivations of an effective divisor on the complex projective line. *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 359 (2007), pp4389–4403.

[Y1] M. Yoshinaga, Characterization of a free arrangement and conjecture of Edelman and Reiner. *Invent. Math.* **157** (2004), no. 2, pp449–454.

[Y2] M. Yoshinaga, Freeness of hyperplane arrangements and related topics. *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse*, Vol. 23 (2014), no. 2, pp483–512.