軸対称ナヴィエ・ストークス流の正則性について

阿部　健*

京都大学理学部数学教室，2016 年 2 月

1　軸対称初期値に対する時間大域可解性

本稿では領域 $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ 上のナヴィエ・ストークス方程式の初期値境界値問題について考察する.

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta u + \nabla p = 0 \quad & \text{in } \Pi \times (0,T), \\ \operatorname{div} u = 0 \quad & \text{in } \Pi \times (0,T), \\ (D(u)n)_{\tan} = 0,\ u \cdot n = 0 \quad & \text{on } \partial\Pi \times (0,T), \\ u = u_0 \quad & \text{on } \Pi \times \{t=0\}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで $D(u) = (\nabla u + \nabla^T u)/2$ は変形テンソル, n を外向き単位法ベクトル, $f_{\tan}$ をベクトル場 f の境界 $\partial\Pi$ 上の接成分とする. 初期値 u_0 は軸対称として初期値境界値問題 (1.1) の時間大域可解性を考察する. ベクトル場 u が軸対称であるとは, 回転行列 $A = (e_r(\eta), e_\theta(\eta), e_z)$ と $\mathbb{R}^3$ の基底 $e_r = (\cos\eta, \sin\eta, 0)^T$, $e_\theta = (-\sin\eta, \cos\eta, 0)^T$, $e_z = (0,0,1)^T$ に対して $u(x) = A^T u(Ax)$ が全ての $x \in \Pi$ と $\eta \in (0, 2\pi)$ に対して成立するときを言う. 軸対称ベクトル場 u は円柱座標 (r, θ, z) を用いて

$$u = u^r(r,z)e_r(\theta) + u^\theta(r,z)e_\theta(\theta) + u^z(r,z)e_z$$

と表示でき, 方位角成分 u^θ は旋回と呼ばれる. 全空間 $\Pi = \mathbb{R}^3$ 上, 軸対称旋回なし初期値に対して (1.1) の解が時間大域的に滑らかになることはよく知られている [15], [23] ([17]). しかし軸対称旋回あり初期値に対して, 解が有界であり続けるかは一般に不明である. これまでに軸対称旋回ありナヴィエ・ストークス流に対しては, 速度場の動径成分に対するセリン型の正則性判定法 [20], [21] や渦度場の方位角成分に対する正則性判定法 [4] が証明されている ([13] も参照). また最近ではチェン等 [5], [6] とコッホ等 [14] によりタイプ I 爆発解の非存在がデジョルジの方法やリュウビル型定理を用いて証明されている ([22] も参照). ここで時刻 $t = T_*$ での爆発がタイプ I であるとはある定数 C が存在し,

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C}{\sqrt{T_* - t}} \qquad t < T_*$$

が成立することを言う. ルレイの爆発解の評価によりタイプ I 爆発は最小の爆発率になることが知られており [19] ([9], [2]), タイプ I 条件のもとでの解の正則性解明は重要である. 実際, 半線形熱方程式においてはタイプ I 爆発が起こり, さらに適当な初期条件のもとではタイプ I 爆発しか起こらないことが証明されている [10]. 爆発がタイプ I でない場合はタイプ II と呼ばれるが, タイプ II 爆発率は拡大 $u_\lambda(x,t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$, $\lambda > 0$, により保たれないためスケール優臨界爆発と考えることができる.

---

*kabe@math.kyoto-u.ac.jp　本研究は科研費（研究スタート支援 15H06312）の助成を受けたものである.

2　外部問題

本稿では全空間 $\mathbb{R}^3$ 上の軸対称ナヴィエ・ストークス流のスケール優臨界爆発について考察する. これまでのところスケール優臨界爆発の可能性についてはあまり研究がなされていない. 本稿では外部問題により全空間上の軸対称解を近似する方法を考察する. 領域 Π^ε を半径 $\varepsilon > 0$ の円柱の外部 $\Pi^\varepsilon = \{x = (x_{\tan}, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_{\tan}| > \varepsilon,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$ として, 滑り境界条件の元で外部問題 (1.1) を考える. 軸対称旋回なし初期値に対しては (1.1) の時間大域解が存在し, さらに極限 $\varepsilon \to 0$ で解は全空間上の軸対称解に近づくことが知られている [15]. 本稿では旋回がある場合の (1.1) の時間大域可解性について報告する.

定理 1 ([1]) 任意に定数 $T > 0$ と $\varepsilon > 0$ を与える.
(i) （時間大域可解性）任意の軸対称旋回あり初期値 $u_0 \in H^1 \cap L^2_\sigma(\Pi^\varepsilon)$, $ru_0^\theta \in \mathcal{H}^1 \cap L^2(\Pi^\varepsilon)$, に対して *(1.1)* の解 $u_\varepsilon = v_\varepsilon + u_\varepsilon^\theta e_\theta \in C([0,T]; L^2_\sigma(\Pi^\varepsilon))$ で

$$\begin{aligned} &u_\varepsilon \in L^\infty(0,T; H^1(\Pi^\varepsilon)), \\ &\partial_t u_\varepsilon \in L^2(0,T; L^2(\Pi^\varepsilon)), \\ &\nabla^2 u_\varepsilon \in L^2(0,T; L^2_{ul}(\overline{\Pi^\varepsilon})), \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Pi^\varepsilon} (|v_\varepsilon|^2 + |u_\varepsilon^\theta|^2)dx + 2\int_0^t \int_{\Pi^\varepsilon} \Big(|\nabla v_\varepsilon|^2 + |\nabla u_\varepsilon^\theta|^2 + \Big|\frac{u_\varepsilon^\theta}{r}\Big|^2\Big)dxdt \\ &+ \frac{2}{\varepsilon}\int_0^t \int_{\partial\Pi^\varepsilon} |u_\varepsilon^\theta|^2 d\mathcal{H}dt \le \int_{\Pi^\varepsilon} (|v_0|^2 + |u_0^\theta|^2)dx \quad t > 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

を満たすものが一意に存在する. ここで $L^2_\sigma(\Pi^\varepsilon)$ は L^2-ソレノイダルベクトル空間を表し, $\mathcal{H}^1(\Pi^\varepsilon)$ は $\nabla\varphi \in L^2(\Pi^\varepsilon)$ かつ $\varphi \in L^2(\partial\Pi^\varepsilon)$ となる関数 $\varphi \in L^1_{loc}(\Pi^\varepsilon)$ 全体の空間を表す.
(ii) （方位角成分の評価）さらに $ru_0^\theta \in L^\infty(\Pi^\varepsilon)$ を仮定する. このとき評価

$$|u_\varepsilon^\theta(r,z,t)| \le \frac{1}{r}\|ru_0^\theta\|_{L^\infty} \quad r > \varepsilon,\ z \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{1.4}$$

が成立する.
(iii) （動径成分, 垂直成分の評価）渦度場の方位角成分 $\Omega_\varepsilon = \omega_\varepsilon^\theta/r$, $\omega_\varepsilon^\theta = \partial_z v_\varepsilon^r - \partial_r v_\varepsilon^z$, に対して評価

$$\int_{\Pi^\varepsilon} |\Omega_\varepsilon|^2 dx + \int_0^t \int_{\Pi^\varepsilon} |\nabla\Omega_\varepsilon|^2 dxdt \le \int_{\Pi^\varepsilon} |\Omega_0|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon^4}\|ru_0^\theta\|^2_{L^\infty}\|u_0\|^2_{L^2} \quad t > 0 \tag{1.5}$$

が成立する.

注意 2 *(i)* 方程式 *(1.1)* の軸対称旋回あり初期値に対する時間大域可解性は, 有界領域 $\Pi_R^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varepsilon < r < R, |z| < R\}$ の場合にザジャツコウスキ *[24] ([25])* により証明されている. そこではガレルキン近似とストークス作用素の L^p 最大正則性を用いて *(1.1)* の時間大域解を構成している. 論文 *[1]* においては *(1.1)* と同値な軸対称旋回なしブジネスク方程式の時間大域可解性を示し, 評価 *(1.3)-(1.5)* とともに *(1.1)* の時間大域可解性を証明した.

(ii) 速度場の方位角成分の評価 *(1.4)* は方程式に付随するスケーリングで普遍である. 即ち, 任意の $T_* > 0$ に対して

$$u^\theta(r,z,t) = \varepsilon u_\varepsilon^\theta(\varepsilon r, \varepsilon z, \varepsilon^2 t + T_*)$$

と定めると u^θ は $\Pi^1 \times (-T_*/\varepsilon^2, 0)$ 上定義された関数で評価

$$|u^\theta(r,z,t)| \le \frac{1}{r}\|ru_0^\theta\|_{L^\infty} \quad r>1,\ z\in\mathbb{R},\ -\frac{T_*}{\varepsilon^2}<t<0$$

を満たす. 従って速度場の方位角成分の爆発率はスケール臨界である.

(iii) 速度場の動径成分, 垂直成分の評価 *(1.5)* は, スケール臨界となる爆発率よりも少し早い. 旋回なし初期値に対しては *(1.5)* の右辺第二項はゼロになり, 渦度場のエネルギーノルム $\|\Omega_\varepsilon\|_{L^2(\Pi^\varepsilon)}$ はパラメーター $\varepsilon>0$ に対して一様有界になる. これにより *(1.1)* の軸対称解 u_ε は $\varepsilon\to 0$ で $\mathbb{R}^3$ 上の滑らかな解へ近づく *[15]*. 旋回がある場合には $\|\Omega_\varepsilon\|_{L^2(\Pi^\varepsilon)}$ は極限 $\varepsilon\to 0$ で非有界となる可能性があるが, 評価 *(1.5)* により渦度場のエネルギーノルム $\|\Omega_\varepsilon\|_{L^2(\Pi^\varepsilon)}$ の爆発率は高々$O(\varepsilon^{-2})$ 程度であることがわかる. 領域 $\Pi^\varepsilon\times(0,T_*)$ 上の *(1.1)* の解に対して, 極限 $\varepsilon\to 0$ での渦度場のエネルギーノルムの爆発が臨界であるとは, ある定数 C が存在し

$$\|\Omega_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T_*;L^2(\Pi^\varepsilon))} \le \frac{C}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} \quad \varepsilon<1$$

が成立することを言う. 上の評価が満たされるとき,

$$\Omega(r,z,t) = \varepsilon^3\Omega(\varepsilon r, \varepsilon z, \varepsilon^2 t + T_*)$$

と定めれば, Ω は $\Pi^1\times(-T_*/\varepsilon^2, 0)$ 上定義された関数で, エネルギーノルム $\|\Omega\|_{L^\infty(-T_*/\varepsilon^2,0;L^2(\Pi^\varepsilon))}$ は ε について一様有界になる. 渦度場のエネルギーノルムの爆発がスケール優臨界とは

$$\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{3/2}\|\Omega_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T_*;L^2(\Pi^\varepsilon))} = \infty$$

となる場合をいう. 評価 *(1.5)* により渦度場のエネルギーノルムのスケール優臨界爆発は遅いレート $3/2\le\alpha<2$ になることが従う. 即ち, 任意の $T_*>0$ に対して, $\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^\alpha\|\Omega_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T_*;L^2(\Pi^\varepsilon))}=\infty$ となる定数 $\alpha\ge 2$ は存在しない.

(iv) オイラー方程式の場合, 軸対称旋回なし初期値に対する時間大域的可解性は *[23]* において証明されている. 円柱領域 $\Pi=\{\varepsilon<r<R\}$ においても軸対称旋回なしオイラー方程式の時間大域可解性が証明されているが *[3]*, 旋回がある場合の時間大域的可解性は不明である. ホウとルオ *[11]* による数値計算では軸対称旋回ありオイラー方程式の解は境界上爆発する可能性が指摘されている. 外部領域 Π^ε における軸対称旋回ありオイラー方程式は半空間上の *2* 次元零粘性ブジネスク方程式ともみなすことができる. *2* 次元零粘性ブジネスク方程式に対する *1* 次元爆発モデルの研究については *[12], [7] , [8]* を参照.

注意 3 最近, 軸対称初期値に対するコーシー問題のスケール優臨界爆発がレイ等 *[16]* によって研究されている. そこではエネルギー有界かつ ru_0^θ が有界となる初期値に対して $\mathbb{R}^3\times(0,T)$ 上の滑らかな軸対称旋回あり解が評価

$$|u(x,t)| \le C\frac{|\log r|^{\frac{1}{2}}}{r^2} \quad 0<t\le T$$

を対称軸 $r=0$ 付近で満たすことが報告されている. 定数 C は初期値にのみ依存する定数である. 証明は渦度場の方位角成分の各点評価を速度場の局所エネルギーと ru^θ の L^∞ 評価を用いて評価する方針である.（渦度場の方位角成分の各点評価については *[18]* も参照）.

参考文献

[1] K. Abe, Global well-posedness of the axisymmetric Navier-Stokes equations in the exterior of an infinite cylinder, Preprint. 2015

[2] K. Abe, The Navier-Stokes equations in a space of bounded functions, Commun. Math. Phys., 338, 849-865, (2015)

[3] D. Chae and O. Y. Imanuvilov, Generic solvability of the axisymmetric 3-D Euler equations and the 2-D Boussinesq equations, J. Differential Equations, 156, 1–17, (1999)

[4] D. Chae and J. Lee, On the regularity of the axisymmetric solutions of the Navier-Stokes equations, Math. Z., 239, 645–671, (2002)

[5] C.-C. Chen, R. M. Strain, T.-P. Tsai and H.-T. Yau, Lower bound on the blow-up rate of the axisymmetric Navier-Stokes equations, Int. Math. Res. Not, 9, 31 (2008)

[6] C.-C. Chen, R. M. Strain, T.-P. Tsai and H.-T. Yau, Lower bounds on the blow-up rate of the axisymmetric Navier-Stokes equations. II, Comm. Partial Differential Equations, 34, 203–232, (2009)

[7] K. Choi, A. Kiselev and Y. Yao, Finite time blow up for a 1D model of 2D Boussinesq system, Comm. Math. Phys., 334, 1667–1679 (2015)

[8] K. Choi, T. Hou, A. Kiselev, G. Luo, V. Sverak and Y. Yao, On the Finite-Time Blowup of a 1D Model for the 3D Axisymmetric Euler Equations, arXiv:1407.4776

[9] Y. Giga, K. Inui and S. Matsui, On the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations with nondecaying initial data, Advances in fluid dynamics, Dept. Math., Seconda Univ. Napoli, Caserta, 4, 27–68 (1999)

[10] Y. Giga and R. V. Kohn, Characterizing blowup using similarity variables, Indiana Univ. Math. J., 36, 1–40 (1987)

[11] T. Hou and G. Luo, Potentially Singular Solutions of the 3D Incompressible Euler Equations, arXiv:1310.0497

[12] T. Hou and G. Luo, On the finite-time blow up of a 1D model for the 3D incompressible Euler equations, arXiv:1311.2613

[13] Q. Jiu and Z. Xin, Some regularity criteria on suitable weak solutions of the 3-D incompressible axisymmetric Navier-Stokes equations, Lectures on partial differential equations, Int. Press, Somerville, MA, 2, 119–139, 2003

[14] G. Koch, N. Nadirashvili, G. A. Seregin and V. Sverak, Liouville theorems for the Navier-Stokes equations and applications, Acta Math., 203, 83-105, (2009)

[15] O. A. Ladyzenskaya, Unique global solvability of the three-dimensional Cauchy problem for the Navier-Stokes equations in the presence of axial symmetry, Zap. Naucn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov, 7, 155-177 (1968)

[16] Z. Lei, E. A. Navas and Qi S. Zhang, A priori bound on the velocity in axially symmetric Navier-Stokes equations, Commun. Math. Phys., 341, 289–307, (2016)

[17] S. Leonardi, J. Malek, J. Necas and Pokorny, M., On axially symmetric flows in $\mathbf{R}^3$, Z. Anal. Anwendungen, 18, 639–649, (1999)

[18] J. B. Loftus and Qi S. Zhang, A priori bounds for the vorticity of axially symmetric solutions to the Navier-Stokes equations, Adv. Differential Equations, 15, 531–560, (2010)

[19] J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Math., 63, 193–248, (1934)

[20] J. Neustupa and M. Pokorny, An interior regularity criterion for an axially symmetric suitable weak solution to the Navier-Stokes equations, J. Math. Fluid Mech., 2, 381–399, (2000)

[21] J. Neustupa and M. Pokorny, Axisymmetric flow of Navier-Stokes fluid in the whole space with non-zero angular velocity component, Proceedings of Partial Differential Equations and Applications (Olomouc, 1999), 126, 469–481, 2001

[22] G. Seregin and V. Sverak, On type I singularities of the local axi-symmetric solutions of the Navier-Stokes equations, Comm. Partial Differential Equations, 34, 171–201 (2009)

[23] M. R. Ukhovskii and V. I. Iudovich, Axially symmetric flows of ideal and viscous fluids filling the whole space, J. Appl. Math. Mech., 32, 52-61 (1968)

[24] W.M. Zajączkowski, Global existence of axially symmetric solutions to Navier-Stokes equations with large angular component of velocity, Colloq. Math., 100, 243–263, (2004)

[25] W.M. Zajączkowski, Global axially symmetric solutions with large swirl to the Navier-Stokes equations, Topol. Methods Nonlinear Anal., 29, 295–331, (2007)