Noether problem for some groups

横田真秀[*]

京都大学理学研究科数学教室, 2014 年 2 月

本講演では、Noether problem（以下 NP）と呼ばれる問題についての部分的な結果を述べる。

1 NP とは

はじめに、NP とはどのような問題であるかを説明する。K を体、G を有限群とし、n を G の位数とする。K 上 n 変数の有理関数体 $K(x_g)$ を考えると、この体には変数を置換する形で自然に G が作用する。ここで $K(x_g)$ の G-不変体をとり、これを $K(G)$ で表す。

例 1.1. $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} =< \sigma >$ であるとき、$\sigma : x_1 \mapsto x_\sigma \mapsto x_1$ であるから K(G) の元は 2 変数の入れ替えで不変な 2 変数有理式、すなわち対称式である。したがって $K(G) = K(x_1 + x_\sigma, x_1 x_\sigma)$ と明示的に表される。(Gal$(K(x_1, x_\sigma)/K(G)) \cong G$ を確かめることは容易である。)

先の例では $K(G)$ を具体的に書き下すことができたが、G が少し大きくなると $K(G)$ を具体的に書き下すことは一般には難しい。そこで、$K(G)$ は K 上有理的 (純超越的) か?ということを考える。これが Permutation Noether Problem(以下 PNP) と呼ばれるものである。

先の例では、具体的に $K(G)$ を K に 2 元を添加した形で書けたので、$G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に対応する PNP は K によらず肯定的である、ということになる。

この問いの答えは G の性質のみならず K の性質にも依存し、一般に K が広い (十分に根を持つ) ほど、多くの G に対して肯定的な結果を持つ。また、現時点で「$\overline{K}(G)$ は $\overline{K}$ 上有理的であるが $K(G)$ は K 上有理的でない」を満たす G の例や、「任意の K に対して $K(G)$ が K 上有理的でない」を満たす G の例が見つかっている。ただし、私は G の性質と結果との対応を見たいため、以降では K は非常に良いものであるとの仮定をおく。具体的には標数を 2,3 でないとし、e を G の exponent とするとき、1 の原始 e 乗根は K に含まれているとする (このくらいの仮定を置けば、今のところ、実質的に K が代数閉体である場合と同様であると考えられる。)。

なお、単に NP といった場合、より一般に、群の作用が単なる変数の置換でない場合も含むことがあり、群 G が $K(x_i)(i = 1, 2, \cdots m)$ に対し

$$g(x_i) = \sum_{j=1}^{m} (\rho(g))_{i,j} x_j$$

の形で作用する Linear NP、同様に G が $K(x_i)(i = 1, 2, \cdots m)$ に対し

$$g(x_i) = c_{g,i,j} \prod_{j=1}^{m} (\rho(g))_{i,j} x_j$$

の形で作用する monomial NP などがあり、それらの間には密接な関係があるが、本セッションの対象としては主に PNP を考え、以降単に NP といった場合は PNP を指すとする。

[*]maho-y@math.kyoto-u.ac.jp

2 準備・主定理

NP を考えるにあたり、重要な定理が以下のものである。

定理 2.1. ρ を G の忠実表現とする。ρ に対応する Linear NP が肯定的ならば、G に対する NP も肯定的である。

一般に忠実表現をうまくとればその次数は n よりもはるかに小さくできるので、この theorem は非常に有用である。

まず、この theorem を使うことで、G が Abel 群である場合については対応する NP はほぼ自明に肯定的な結果が得られることが確認される (忠実表現 ρ が必ず 1 次既約表現の直和と同値であるから。)。この結果を受けて、感覚的に「G の構造が Abel 群に近い、つまり G の非可換性が弱ければ、$K(G)$ の有理性を示すのは易しいのではないか。」という予想が立つ。ここで非可換性が弱いという性質を数学的にどう表すかが問題になるが、先の theorem もあるので今回は「忠実表現の次数」を非可換性を測る指標として採用する。一つ一つの既約表現因子が小さい群ほど与しやすいであろう、という考え方である。

この方向からのアプローチに関しての一つの大きな結果が、次に記す Kang 氏らの結果である。

定理 2.2. G が 3 次以下の忠実表現 ρ を持つならば、対応する NP は肯定的である。

また Kang 氏は G を 2-群に限定した場合の結果として、より強い以下の定理を証明している。

定理 2.3. G が 2-群であり 5 次以下の忠実表現 ρ を持つならば、対応する NP は肯定的である。

Theorem**??**を一般化しようというのが私の試みである。具体的には、G の忠実表現として 3 次以下の表現の代わりに 3 次以下の表現の直和まで認めて同様のことが言えないか、というものである。直和になってもほぼ同じ方針で有理性が証明できるのではないか、という素朴な直感もあるだろうが、実際には表現が直和の形になっているからといってそれぞれの表現に対して不変体を求めてその結果をうまくくっつければいい、というわけにはいかないため、先の定理の証明をなぞってもうまくいかない。それに関する私の結果の一つが以下のものである。

定理 2.4. G が 3 次以下の表現の直和の形の忠実表現 ρ を持ち、G の位数偶数の元が全て ρ で対角行列に移るならば、対応する NP は肯定的である。

以降ではこの theorem の証明の概略を記す。

3 主定理の証明の概略

主定理を証明するにあたり、まず、「G が具体的に 1 つ与えられ、その有理性を証明せよとなったとき、どう証明するか」という手順を明確にしよう。

その手順は、忠実表現の次数等によらず、およそ以下のようなものである。

1. 忠実表現 ρ をうまくとる。
2.$H \lhd G$ をうまくとる。
3.$K(y_i) = K(x_i)^H$ となるような y_i をとる。
4.$K(u_i) = K(y_i)$ を満たし、G/H の u_i への作用が簡単な形で表されるような u_i をうまくとる。
5.G に G/H を、x_i に u_i を代入する。

6. 問題が十分簡単な場合 (有理性が既に示されている場合) に帰着されていれば証明完了。そうでなければ 2. に戻る。

手順 2〜5 を経るたびに G の位数は小さくなっていくから、この手順が止まりさえしなければ有理性の証明ができることになる。ところが手順 1,2,4 の「うまくとる」と書いた部分には障害があり、これは好き勝手にとるわけにはいかない。すなわち、手順 2 で都合の悪い正規部分群を選んでしまったために手順 4 で u_i をうまくとれない、ということが起こりえる。通常 G が与えられているときはその構造を参考にしつつ経験則に基づいて H を選び、試行錯誤的に証明を考えるのであるが、この選び方として「証明手順が止まらない一般的な選び方」があるのではないか、という考え方が、証明の根本である。

まず先の証明手順で述べた 2.〜6. の 1 周を「簡約化手順」と呼ぶ。そして、簡約化手順の列 $\{R_i\}_{i=1}^{n}$ と群・表現の性質の列 $\{P_i\}_{i=1}^{m}$ で以下を満たすものをとる。

(i) 証明開始時点で任意の (G,ρ) は P_1 を満たす。
(ii)P_i を満たす (G,ρ) に R_i が行える場合、それを行って得られる新しい (G,ρ) も P_i を満たす。
(iii)P_i を満たす (G,ρ) に R_i がそれ以上行えない場合、(G,ρ) は P_{i+1} を満たす。$(1 \leq i \leq m-1)$
(iv)P_m を満たす (G,ρ) で R_m の簡約化手順が行えないものは、定理の仮定の下では自明なもののみである。

このリストが作られれば (このリストを作るのが証明の山であり、発想自体は別段突飛でないといえよう。)、それはすなわち任意の群に対し有理性を示す方法を示したことになる。そしてそれは実際に可能である (具体的には論文を参照のこと。)。

4 今後の課題

この定理は 3-群に関する主張「G が 3-群であり、忠実表現として 3 次以下 (1 次または 3 次) の表現の直和であるようなものがとれるならば対応する NP は肯定的である。」を含んでいる。そして証明の流れを見ると、これは p-群に一般化できるだろうという予想、すなわち、p-群に対しその忠実表現として p 次以下 (1 次または p 次) の表現の直和であるようなものがとれるならば対応する NP は肯定的であろうという予想が自然に立つ。

ただし実際に証明を試みると簡約化手順のリストを作るのが p=3 のとき以外は難しく、より一般的な手法の発見が求められるところである。

また、主定理の仮定の後半部分を外せないだろうか?という考えも自然であるが、これについてもまだ証明できていない。(同様の方法で $\{P_i\}_{i=1}^{m}$ の列を改善するだけで証明するのは困難であるように思われる。)

参考文献

[1] [AHK1] H. Ahmad, M. Hajja, M. Kang, Rationality of some projective linear actions, J. Algebra 228 (2000) 643—658.

[2] [BB1] Fedor Bogomolov, Christian Böhning, Isoclinism and stable cohomology of wreath products

[3] [CHK1] Huah Chu, Shou-Jen Hu, Ming-chang Kang, Y.G. Prokhorov, Noether ’ s problem for groups of order 32

[4] [CHKK1] Huah Chu, Shou-Jen Hu, Ming-chang Kang, Boris E. Kunyavskii, Noether ’ s Problem and the Unramified Brauer Group for Groups of Order 64

[5] [H1] M. Hajja, Rationality of finite groups of monomial automorphisms of K(x,y), J. Algebra 109 (1987) 46—51.

[6] [HK1] M. Hajja, M. Kang, Finite group actions on rational function fields, J. Algebra 149 (1992) 139—154.

[7] [HK2] M. Hajja, M. Kang, Three-dimensional purely monomial group actions, J. Algebra 170 (1994) 805—860.

[8] [HK3] M. Hajja, M. Kang, Some actions of symmetric groups, J. Algebra 177 (1995) 511—535.

[9] [HKK1] Akinari Hoshi, Ming-chang Kang, Boris E. Kunyavskii, Noether's Problem and Unramified Brauer Groups

[10] [HKK2] A. Hoshi, M. Kang, H. Kitayama, Quasi-monomial actions and some 4-dimensional rationality problems

[11] [HR1] A. Hoshi, Y. Rikuna, Rationality problem of three-dimensional purely monomial group actions

[12] [Ka1] M. Kang, Noether ’ s problem for dihedral 2-groups II, Pacific J. Math. 222 (2005) 301—316.

[13] [Ka2] M. Kang, Rationality problem for some meta-abelian groups, J. Algebra 322 (2009) 1214-1219

[14] [KMZ1] Ming-chang Kang, Ivo M. Michailov, Jian Zhou, Noether's problem for the groups with a cyclic subgroup of index 4

[15] [KP1] M. Kang, B. Plans, Reduction theorems for Noether ’ s problem

[16] [Sa1] Saltman D. J.,Noether ’ s problem over an algebraically closed field

[17] [Se1] J.P. Serre, Linear Representations of Finite Groups

[18] [Ya1] Aiichi Yamasaki, Isoclinism Families of Groups of Order 256, Munuscript in preperation