Moment-angle complexについて

矢野　達哉 *

大阪府立大学大学院理学系研究科, 2014 年 3 月

このたびは城崎新人セミナーに参加させていただきありがとうございました. この場を借りて運営委員の方々にお礼申し上げます.

1　はじめに

moment-angle complex $Z_K(D^2, S^1)$ は抽象単体複体 K によって定まる,2 次元球体 D^2 と 1 次元球面 S^1 の積で構成される. D^2 と S^1 を位相空間 X とその部分位相空間 A で置き換えたものは多面体積 (generalized moment-angle complex) $Z_K(X, A)$ と呼ばれ, トーリックトポロジーやホモトピー論の分野で研究されている. 本稿では多面体積の定義から始め, 以下の定理の証明を紹介する.

定理 1 (Grujić and Welker)**.** K を [m] 上の抽象単体複体とし, 任意の $i \in [m]$ に対して $\{i\} \in K$ とする. このとき,K の Alexander dual が vertex decomposable ならば $Z_K(D^n, S^{n-1})$ は球面の一点和にホモトピー同値である.

ここで, n 次元球体 $D^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$,$(n-1)$ 次元球面 $S^{n-1} = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ とする.

2　準備

定義 1. $V \subset [m] = \{1, 2, \cdots, m\}$ に対して K が $[m]$ 上の**抽象単体複体**であるとは以下をみたすことである.

1. $K \subset 2^V$.
2. 任意の $v \in V$ に対して $\{v\} \in K$ である.
3. $\sigma \in K$ かつ $\tau \subset \sigma$ ならば $\tau \in K$ である.

$V(K) = V$ を K の点集合と呼ぶ. また,$\sigma \in K$ に対して $\sigma \subset \tau$ なる $\tau \in K$ が存在しないとき,σ を facet と呼ぶ.

※以後, K は $[m]$ 上の抽象単体複体を表す.

*su301034@edu.osakafu-u.ac.jp

定義 2. 位相空間の列 $(\underline{X}, \underline{A}) = \{(X_i, A_i)\}_{i=1}^m$ と $\sigma \in K$ に対して

$$(\underline{X}, \underline{A})^\sigma = Y_1^\sigma \times \cdots \times Y_m^\sigma \quad \text{where} \quad Y_i^\sigma = \begin{cases} X_i & \text{if} \quad i \in \sigma, \\ A_i & \text{if} \quad i \notin \sigma. \end{cases}$$

とするとき, **多面体積 (generalized moment angle complex)** $Z_K(\underline{X}, \underline{A})$ を以下で定義する.

$$Z_K(\underline{X}, \underline{A}) = \bigcup_{\sigma \in K} (\underline{X}, \underline{A})^\sigma \subset X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m.$$

※任意の i に対して $(X_i, A_i) = (X, A)$ ならば,$Z_K(\underline{X}, \underline{A}) = Z_K(X, A)$ とかく.

定義 3. K の **Alexander dual** K° を以下で定義する.

$$K^\circ = \Big\{\sigma \subset [m] \;\mid\; [m] \setminus \sigma \notin K\Big\}.$$

Remark.

$$(K^\circ)^\circ = K.$$

定義 4. $\sigma \in K$ に対して

$$\mathrm{link}_K(\sigma) := \Big\{\tau \in K \;\mid\; \tau \cap \sigma = \emptyset, \tau \cup \sigma \in K\Big\}, \mathrm{del}_K(\sigma) := \Big\{\tau \in K \;\mid\; \tau \cap \sigma = \emptyset\Big\}, \mathrm{star}_K(\sigma) := \Big\{\tau \in K \mid \tau \cup \sigma \in K\Big\}$$

※ $\mathrm{link}_K(\sigma), \mathrm{del}_K(\sigma)$ を $[m] \setminus \sigma$ 上の抽象単体複体とみなす.

Remark. $\mathrm{del}_K(\sigma) \cup \mathrm{star}_K(\sigma) = K, \quad \mathrm{del}_K(\sigma) \cap \mathrm{star}_K(\sigma) = \mathrm{link}_K(\sigma).$

補題 2. $v \in [m]$

$$(\mathrm{link}_K(v))^\circ = \mathrm{del}_{K^\circ}(v), \quad (\mathrm{del}_K(v))^\circ = \mathrm{link}_{K^\circ}(v)$$

証明　容易. □

定義 5. K が **vertex decomposable** であるとは以下のどちらかを満たすことである.

1. $K = \emptyset$ または $K = 2^{V(K)}$
2. 以下を満たす $v \in V(K)$ が存在する.
   (a) $\mathrm{del}_K(v)$ と $\mathrm{link}_K(v)$ が vertex decomposable である
   (b) $\mathrm{link}_K(v)$ の facet は $\mathrm{del}_K(v)$ の facet ではない

上の v を **shedding vertex** という.

定義 6.

$$K^{\langle i \rangle} := \Big\{\sigma \subset [m] \mid \exists F \in K : \text{facet}\Big(|F| \geq i+1, \sigma \subset F\Big)\Big\}$$

定義 7. K が **sequentially Cohen-Macaulay over** $\mathbb{Z}$ (SCM/$\mathbb{Z}$) であるとは以下を満たすことである.

- 任意の $i \geq 0$, 任意の $j < i$, 任意の $\sigma \in K$ に対して $\widetilde{\mathrm{H}}_j(\mathrm{link}_K(\sigma)^{\langle i \rangle}; \mathbb{Z}) = 0$.

事実 1.

$$\text{vertex decomposable} \Longrightarrow \text{sequentially Cohen-Macaulay over } \mathbb{Z}$$

3　離散 Morse 理論

定義 8. X を compact regular CW 複体とする. 有向グラフ $G_X = (V_X, E_X)$ を以下で定義する.

$$V_X := \{c \mid c : X \text{ の closed cell}\}, \quad E_X := \{c \to c' \mid c, c' \in V_X,\ c' \subseteq c, \dim(c) = \dim(c') + 1\}$$

※ $\dim(c)$:= 胞体 c の次元, $c \to c' := (c, c') \in V_X \times V_X$
V_X, E_X をそれぞれ有向グラフ $G_X = (V_X, E_X)$ の点集合, 枝集合 と呼ぶ.

Remark. $Z_K(D^n, S^{n-1})$ は compact regular CW 複体である.

定義 9. $G_X = (V_X, E_X)$ を X の有向グラフとする.
$E_X \supseteq \mathcal{M}_X$: G_X の **matching** $\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ V_X の任意の点は $\mathcal{M}_X$ の枝に多くとも 1 回のみあらわれる.

$E_X^{\mathcal{M}_X} := (E_X \setminus \mathcal{M}_X) \cup \{c' \to c \mid c \to c' \in \mathcal{M}_X\}$ とする.

$\mathcal{M}_X$: **acyclic** $\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ $E_X^{\mathcal{M}_X}$ が cycle を含まない.

※ $v_1, v_2 \cdots, v_n \in V_X$ に対して,$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n$ という列が $v_1 = v_n$ を満たすならば, これを cycle という.
$\mathrm{Crit}(\mathcal{M}) := \{c \in V_X \mid$ 任意の $c' \to c'' \in \mathcal{M}$ に対して $c \neq c', c \neq c''\}$

$\mathrm{Crit}(\mathcal{M})$ の要素を **critical cell** と呼ぶ.

定理 3. X を compact regular CW 複体とし,$\mathcal{M}_X$ を G_X の acyclic matching とする.

$$X \simeq X^{\mathcal{M}_X}$$

ここで, $X^{\mathcal{M}_X}$ は次元 i の critical cell $c \in \mathrm{Crit}(\mathcal{M}_X)$ を (i-1)-skeleton $X^{\mathcal{M}_X}$ に $f_c^{\mathcal{M}_X}$ で接着した CW 複体である.

※ $f_c^{\mathcal{M}_X}$ を定義していないが, 詳しい定義は [VW] を参照.

4　主定理の証明

補題 4,5,6,7 は証明を省略する. 証明は [VW] を参照. 以降,

$$\begin{aligned} e_+^i &= \Big\{(x_1, x_2, \cdots, x_{i+1}, 0, \cdots, 0) \in S^{n-1} \mid x_i \geq 0\Big\} \\ e_-^i &= \Big\{(x_1, x_2, \cdots, x_{i+1}, 0, \cdots, 0) \in S^{n-1} \mid x_i \leq 0\Big\} \\ e_\bullet^n &= D^n \end{aligned}$$

とする.

補題 4. $\mathcal{M}_{D^n} = \Big\{e_-^{i+1} \to e_+^i \mid 0 \leq i \leq n-2\Big\} \cup \Big\{e_\bullet^n \to e_+^{n-1}\Big\}$ は acyclic matching である.

$1 \leq i \leq m$ に対して,

$$\mathcal{M}_i = \begin{cases} \{c \to c' \in E_{Z_K(D^n, S^{n-1})} \mid c_1 \to c_1' \in \mathcal{M}_{D^n}\} & \text{if} \quad i = 1, \\ \{c \to c' \in E_{Z_K(D^n, S^{n-1})} \mid c, c' \in \mathrm{Crit}(\bigcup_{k=1}^{i-1} \mathcal{M}_k), c_i \to c_i' \in \mathcal{M}_{D^n}\} & \text{if} \quad i \geq 2. \end{cases}$$

と定義し,

$$\mathcal{M}_{Z_K(D^n,S^{n-1})} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{M}_i$$

とする. このとき, 以下がわかる.

補題 5. $\mathcal{M}_{Z_K(D^n,S^{n-1})}$ は acyclic matching である.

※この補題 5 により $Z_K(D^n,S^{n-1}) \simeq Z_K(D^n,S^{n-1})^{\mathcal{M}_{Z_K(D^n,S^{n-1})}}$ がわかる.

補題 6. K を [m] 上の抽象単体複体とし, 任意の $i \in [m]$ に対して $\{i\} \in K$ とする. また,K の Alexander dual が vertex decomposable とし,m を K° の shedding vertex とする. このとき,

$$i : Z_{\mathrm{link}_K(m)}(D^n,S^{n-1}) \hookrightarrow Z_{\mathrm{del}_K(m)}(D^n,S^{n-1})$$

は零ホモトープである (i.e. $i \simeq *$).

定理 1 の証明

m に関する帰納法により示す.

m=1 の場合　任意の K は Alexander dual が vertex decomposable である.

$$\mathrm{Crit}(\mathcal{M}_{Z_K(D^n,S^{n-1})}) = \begin{cases} \{e^0_-\} & \text{if} \quad \{1\} \in K, \\ \{e^0_-, e^{n-1}_+\} & \text{if} \quad \{1\} \notin K. \end{cases}$$

である. よって,

$$Z_K(D^n,S^{n-1}) \simeq \begin{cases} e^0_- & \text{if} \quad \{1\} \in K, \\ e^0_- \cup e^{n-1}_+ \simeq S^{n-1} & \text{if} \quad \{1\} \notin K. \end{cases}$$

よって,$m=1$ のときは示された.

m≥2 の場合　ある $\Omega \subset [m]$ に対して,$K^\circ = 2^\Omega$ である場合,

$$K = \{\sigma \cup \tau \mid \sigma \in \Delta^\Omega, \tau \in \partial\Delta^{[m]\setminus\Omega}\}$$

である.

$$Z_K(D^n,S^{n-1}) \approx \bigcup_{i=\sharp\Omega+1}^{m} D^n \times \cdots \times D^n \times \underbrace{S^{n-1}}_{i\text{ 番目}} \times D^n \times \cdots \times D^n$$

である.

したがって,$Z_K(D^n,S^{n-1}) \simeq S^{nr-1}$ である.

K° が shedding vertex m を持つとする。

$$Z_K(D^n,S^{n-1}) = \mathrm{colim}\left\{ Z_{\overline{\mathrm{del}_K(m)}}(D^n,S^{n-1}) \xleftarrow{i} Z_{\overline{\mathrm{link}_K(m)}}(D^n,S^{n-1}) \xrightarrow{j} Z_{\mathrm{star}_K(m)}(D^n,S^{n-1}) \right\}$$

i, j は inclusion とする.

$[m-1]$ 上の抽象単体複体 L に対して $\overline{L}$ は $[m]$ 上の抽象単体複体とする. Projection lemma より,

$$Z_K(D^n,S^{n-1}) \simeq \mathrm{hocolim}\left\{ Z_{\overline{\mathrm{del}_K(m)}}(D^n,S^{n-1}) \xleftarrow{i} Z_{\overline{\mathrm{link}_K(m)}}(D^n,S^{n-1}) \xrightarrow{j} Z_{\mathrm{star}_K(m)}(D^n,S^{n-1}) \right\}.$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
Z_{\overline{\mathrm{link}_K(m)}}(D^n, S^{n-1}) &= Z_{\mathrm{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times S^{n-1} \\
Z_{\overline{K\setminus m}}(D^n, S^{n-1}) &= Z_{\mathrm{del}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times S^{n-1} \\
Z_{\mathrm{star}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) &= Z_{\mathrm{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times D^n
\end{aligned}
$$

である.

補題 7. $(X, A), (D, S)$ を CW 対とし,$A \xrightarrow{i} X$,$S \xrightarrow{j} D$ はそれぞれ零ホモトープであるとする. このとき,

$$\mathrm{hocolim}\left\{X \times S \overset{i\times 1}{\leftarrow} A \times S \overset{1\times j}{\rightarrow} A \times D\right\} \simeq \frac{X \times S}{* \times S} \vee \Sigma(A \wedge S) \vee \frac{A \times D}{A \times *}.$$

よって,

$$
\begin{aligned}
Z_K(D^n, S^{n-1}) \simeq \quad & \frac{Z_{\mathrm{del}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times S^{n-1}}{* \times S^{n-1}} && (1) \\
\vee \quad & \Sigma(Z_{\mathrm{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \wedge S^{n-1}) && (2) \\
\vee \quad & \frac{Z_{\mathrm{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times D^n}{Z_{\mathrm{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times *} && (3)
\end{aligned}
$$

(1) $(Z_{\mathrm{del}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times S^{n-1})/(* \times S^{n-1})$

m : K° の shedding vertex $\Longrightarrow \mathrm{link}_{K^\circ}(m)$: vertex decomposable $\Longleftrightarrow (\mathrm{del}_K(m))^\circ$: vertex decomposable

より, 帰納法の仮定から $Z_{\mathrm{del}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \simeq$ 球面の一点和 である. よって,

$$Z_{\mathrm{del}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times S^{n-1} \simeq \text{球面の一点和} \times S^{n-1}.$$

よって、

$$(Z_{\mathrm{del}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times S^{n-1})/(* \times S^{n-1}) \simeq \text{球面の一点和}.$$

(2) $\Sigma(Z_{\mathrm{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \wedge S^{n-1})$

m : K° の shedding vertex $\Longrightarrow \mathrm{del}_{K^\circ}(m)$: vertex decomposable $\Longleftrightarrow (\mathrm{link}_K(m))^\circ$: vertex decomposable

より, 帰納法の仮定から,$Z_{\mathrm{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \simeq$ 球面の一点和 である. よって,

$$\Sigma(Z_{\mathrm{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \wedge S^{n-1}) \simeq \text{球面の一点和}.$$

(3) $\dfrac{Z_{\mathrm{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times D^n}{Z_{\mathrm{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times *}$

$$
\begin{aligned}
&\frac{Z_{\mathrm{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times D^n}{Z_{\mathrm{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times *} \\
&= \mathrm{colim}\left\{* \leftarrow Z_{\mathrm{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times * \overset{\text{包含写像}}{\rightarrow} Z_{\mathrm{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times D^n\right\} \\
&\simeq \mathrm{hocolim}\left\{* \leftarrow Z_{\mathrm{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times * \overset{\text{包含写像}}{\rightarrow} Z_{\mathrm{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times D^n\right\} \\
&\simeq *
\end{aligned}
$$

□

参考文献

[VW] V.Grujić, V.Welker, “Discrete Morse theory for moment-angle complexes of pairs (D^n, S^{n-1})”, arXiv:1212.2028v2, 2012.