非線形シュレディンガー方程式の定在波解の漸近安定性

山添 祥太郎 *

京都大学大学院 情報学研究科，2015 年 2 月

1　導入

次のポテンシャル付き非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t u = -\Delta u + V(x)u + \beta(|u|^2)u & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{NLS}$$

ここで $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_d}^2$ は Laplacian, $V:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は既知関数, $u_0:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ は初期関数, $u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ は未知関数である．(NLS) は物理学において様々な非線形波動現象を記述する際に現れる．典型的な例としては, $\beta(s)=\lambda s$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ のとき, (NLS) は光ファイバー中の光波の伝播を表す方程式として広く用いられている．また, 量子力学においては Bose-Einstein 凝縮している粒子の時間発展を記述する方程式 (Gross-Pitaevskii 方程式) として知られている．

(NLS) を, Sobolev 空間 $H^1(\mathbb{R}^d)$ に値をとる連続関数の空間 $C(\mathbb{R}_t, H^1(\mathbb{R}^d_x))$ で考える．(NLS) の非自明な解であって $u(t,x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\phi_\omega(x)$ $(\phi_\omega \in H^1(\mathbb{R}^d))$ と書かれるものを定在波解という．ここで $\omega > 0$ は実数のパラメータである．さらに, 定在波解のうち作用汎関数

$$S_\omega(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(|\nabla u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2 + B(|u(x)|^2) + \omega|u(x)|^2\right)\mathrm{d}x$$

を最小化するものを基底状態という．ただし $B(s) = \int_0^s \beta(s')\,\mathrm{d}s'$ とおいた．V と β に関する適切な仮定のもとで, ω について滑らかな基底状態の族が存在することが知られている [1][6].

基底状態が存在するとき, その基底状態が “安定” かどうかという問題が自然に現れる．安定な状態は, 物理的には実際に観測できる状態であると解釈できるので, 安定性の問題は数学的な興味のみならず物理的・工学的にも重要な意味を持つ．安定性の概念の一つに軌道安定性と呼ばれるものがある．基底状態 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\phi_\omega$ が軌道安定であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して

$$\inf_{\gamma\in\mathbb{S}^1}\left\|u_0 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\phi_\omega\right\|_{H^1} < \delta \Rightarrow \inf_{\gamma\in\mathbb{S}^1}\left\|u(t) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\phi_\omega\right\|_{H^1} < \varepsilon \quad (t > 0)$$

となることを言う．ここで, $u(t)$ は初期関数 u_0 に対する (NLS) の解である．基底状態の軌道安定性については, 1980 年代以降, 盛んに研究されており [2][6], 特に $\mathrm{d}\left\|\phi_\omega\right\|_{L^2}^2/\mathrm{d}\omega > 0$ が軌道安定性のための良い十分条件として知られている [10].

軌道安定性の研究からしばらくして, 基底状態に近い初期関数に対する (NLS) の解は $t\to\infty$ において基底状態と漸近自由な項との和のようにふるまうことが Soffer-Weinstein[8] により示され

*yamazoe@amp.i.kyoto-u.ac.jp

た．この意味での安定性を漸近安定性という．これは, 軌道安定性より精密な結果である．Soffer-Weinstein の結果では, 基底状態の周りでの線形化作用素の固有値の分布に対して制約があった．最近になって, この制約は Cuccagna-Mizumachi[5], Cuccagna[3][4] などにより緩められ, 漸近安定性の成立のための一般的な条件が知られるようになった．ポスターセッションでは, Cuccagna[3] による漸近安定性の結果を発表者の研究経過を交えて紹介した．

2 主定理と証明の概略

Cuccagna[3] による漸近安定性の定理を述べ, その証明の概略を記す．定理の主張を述べるにあたり, いくつかの仮定を置く．

(A) V と β に関する仮定

(A-1) $\beta \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\beta(0) = 0$.

(A-2) ある $p \in (1, 5)$ が存在して, すべての $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とある $C_k > 0$ に対して

$$\left| \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} \beta(s^2) \right| \le C_k \left| s \right|^{p-k-1} \quad (|s| \ge 1)$$

が成り立つ.

(A-3) $V \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. また, すべての多重指数 $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^3$ に対して, ある $C_\alpha > 0$, $a_\alpha > 0$ が存在して $|\partial_x^\alpha V(x)| \le C_\alpha \mathrm{e}^{-a_\alpha |x|}$ が成り立つ.

(B) ある開区間 $\mathcal{O} (\subset (0, \infty))$ と基底状態の族 $\{\phi_\omega\}_{\omega \in \mathcal{O}} \subset H^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ が存在する．さらに, 写像 $\mathcal{O} \ni \omega \mapsto \phi_\omega \in H^1$ は C^1 級であって, すべての $\omega \in \mathcal{O}$ に対して $\mathrm{d} \left\| \phi_\omega \right\|_{L^2}^2 / \mathrm{d}\omega > 0$ が成り立つ. (軌道安定性の十分条件)

(C) 線形化作用素のスペクトルに関する仮定

(C-1) $\mathcal{H}_\omega$ を基底状態の周りの線形化作用素とする．厳密な定義は定理 1 の証明の概略を参照. $\mathcal{H}_\omega$ の持つ対称性から, 0 は $\mathcal{H}_\omega$ の固有値であって, $\mathcal{H}_\omega$ の固有値は虚軸について対称に分布することが証明できる．$\mathcal{H}_\omega$ の固有値は有限個であって, すべて実数であると仮定する．正の固有値を $\lambda_1(\omega), \ldots, \lambda_m(\omega)$ $(0 < \lambda_1(\omega) \le \cdots \le \lambda_m(\omega) < \omega)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とおく．$\mathcal{O}$ 上, 固有値の多重度は一定であると仮定する．さらに, 各 $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して, ω に依らない $N_j \in \mathbb{N}$ が存在して

$$N_j \lambda_j(\omega) < \omega < (N_j + 1)\lambda_j(\omega)$$

がすべての $\omega \in \mathcal{O}$ に対して成り立つと仮定する．$N := N_1$ とおく．

(C-2) 多重指数 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{Z}^m$ が $|\mu| \le 2N + 3$ を満たすならば, $\mu \cdot \lambda(\omega) \ne \omega$.

(C-3) 固有値の相異なる部分列 $(\lambda_{j_l}(\omega))_{l=1}^k \subset (\lambda_j(\omega))_{j=1}^m$, $\lambda_{j_1}(\omega) < \cdots < \lambda_{j_k}(\omega)$ と $|\mu| \le 2N + 3$ を満たす多重指数 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k) \in \mathbb{Z}^k$ に対して

$$\mu_1 \lambda_{j_1}(\omega) + \cdots + \mu_k \lambda_{j_k}(\omega) = 0 \iff \mu = 0$$

が成り立つ.

(C-4) $L_+ := -\Delta + V + \omega + \beta(\phi_\omega^2) + 2\beta'(\phi_\omega^2)\phi_\omega^2$ はただ 1 つの負の固有値を持ち, $\operatorname{Ker} L_+ = \{0\}$.

(C-5) $\mathcal{H}_\omega$ は 0, $\pm \mathrm{i}\lambda_j$ $(j=1,\ldots,m)$ 以外に固有値を持たない．また, $\pm\omega$ は $\mathcal{H}_\omega$ のレゾナンスではない．ここで, $\pm\omega$ が $\mathcal{H}_\omega$ のレゾナンスであるとは, ある $F \in \bigcap_{S>1/2} L^{2,-S} \setminus L^2$ が存在して, 方程式 $\mathcal{H}_\omega F = \pm\omega F$ が超関数の意味で満たされることをいう．

(D) Fermi の黄金律 (3) が成立．

定理 1 (Cuccagna[3])**.** $d \geq 3$ とし, **(A)-(D)** を仮定する．このとき, ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, $\varepsilon := \inf_{\gamma\in\mathbb{S}^1} \|u_0 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\phi_\omega\|_{H^1} < \varepsilon_0$ なる初期関数 $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ に対して, ある $\omega_\pm = \omega + O(\varepsilon)$, $\theta(t) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $h_\pm = O(\varepsilon) \in H^1(\mathbb{R}^d)$ が存在して

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|u(t) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}\phi_{\omega_\pm} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta}h_\pm\|_{H^1} = 0$$

が成り立つ．

注意 2. 上記の仮定についていくつかの補足を述べる．

- **(B)** の $\omega \mapsto \phi_\omega$ の滑らかさに関する仮定は, 多くの場合に実際に成り立つことが証明されている [7, Theorem 18].
- **(C-2), (C-3)** は非共鳴条件と呼ばれ, 定理 1 の証明において Birkhoff の定理を適用する際に本質的に用いられる．
- **(C-4)** について, L_+ が唯一つの負固有値を持つという条件は, 線形安定な束縛状態 (bound state) が基底状態のみしかないことを意味している．L_+ が二つ以上の負固有値を持つ場合については Tsai[9] による結果が知られている．
- **(C-4)** について, $\operatorname{Ker} L_+ = \{0\}$ の仮定は (NLS) が並進対称性を持たないことに関係している．$V \equiv 0$ の場合にはこの仮定は満たされず, 移動する基底状態が現れる．この場合にも定理 1 に対応する結果が成り立つことが, 最近, Cuccagna[4] によって証明された．

証明の概略．証明には Hamilton 系の理論が用いられる．証明は大きく 4 つのパートに分かれる．証明の第 1 段では, (NLS) の解 u とその複素共役 $\overline{u}$ をペアにして, (NLS) を次の発展方程式系と見なす．

$$\mathrm{i}\partial_t U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (-\Delta U + V(x)U + \beta(|U|^2)U). \tag{NLS-2}$$

ここで $U := (u, \overline{u})^{\mathrm{T}}$ と置いた．これは

$$H(u) := \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\nabla u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2 + B(|u|^2)\right) \mathrm{d}x$$

を Hamiltonian とする Hamilton 系である．次に, (NLS-2) を基底状態 $\Phi_\omega := (\phi_\omega, \phi_\omega)^{\mathrm{T}}$ の周りで線形化する．線形化作用素 $\mathcal{H}_\omega$ は

$$\mathcal{H}_\omega := (-\Delta + V + \omega + \beta(\phi_\omega^2) + \beta'(\phi_\omega^2)\phi_\omega^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta'(\phi_\omega^2)\phi_\omega^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

と表される．

第 2 段では, $\mathcal{H}_\omega$ のスペクトル分解を用いて (NLS-2) の解の空間に座標を入れる．まず $\omega_0 > 0$ を $\|\phi_{\omega_0}\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$ となるように取り固定する．仮定 **(B)** より, $\varepsilon_0 > 0$ を十分小さく選ぶと, このような ω_0 はただ一つ存在することが分かる．仮定 **(C-1)** より, $\mathcal{H}_\omega$ のスペクトルは

$$\sigma(\mathcal{H}_\omega) = \{0, \pm\lambda_1(\omega), \ldots, \pm\lambda_m(\omega)\} \cup \sigma_c(\mathcal{H}_\omega), \quad \sigma_c(\mathcal{H}_\omega) = (-\infty, -\omega] \cup [\omega, \infty)$$

と表される．また, 仮定 **(B)** を用いれば, 固有値 0 は非単純であって, その Jordan chain の長さは 2 であることが証明できる．従って, $L^2(\mathbb{R}^d)$ を $\mathcal{H}_\omega$ の連続スペクトル成分へ射影した空間を $L^2_c(\omega)$ と書くと,

$$L^2(\mathbb{R}^d) = \mathrm{gKer}(\mathcal{H}_\omega) \oplus \left(\bigoplus_{\pm} \bigoplus_{j=1}^{m} \mathrm{Ker}(\mathcal{H}_\omega \mp \lambda_j) \right) \oplus L^2_c(\omega)$$

なる分解を得る．これを用いて, (NLS-2) の解 $U(t)$ を

$$U(t) = \exp\left(\mathrm{i}\theta(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \left(\Phi_{\omega(t)} + \sum_{j=1}^{m} \left(z_j(t)\xi_j + \overline{z}_j(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xi_j \right) + P_c(\omega(t))f(t) \right) \quad (1)$$

と分解する．ここで, ξ_j は λ_j の固有関数, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xi_j$ は $-\lambda_j$ の固有関数, $f(t) \in L^2_c(\omega_0)$ である．また, $\omega(t)$, $\theta(t)$ はある実数値関数であって, (1) において $\mathrm{gKer}(\mathcal{H}_\omega)$ の項が現れないという条件から定められる．基底状態の近傍における $\omega(t)$, $\theta(t)$ の一意存在は陰関数定理によって保障されている．さらに, $P_c(\omega)$ は L^2 から $L^2_c(\omega)$ への射影作用素であって, ω と ω_0 が十分近いとき, $P_c(\omega)$ は $L^2_c(\omega_0)$ から $L^2_c(\omega)$ への同型写像となる．(1) により, $\omega(t)$, $z_j(t)$, $f(t)$ の漸近挙動について次の 3 つの主張が示されれば, 定理の証明が完了する．

(i) $\lim_{t\to\pm\infty} \omega(t) = \omega_\pm$.

(ii) $t \to \pm\infty$ のとき, $f(t)$ はある自由 Schrödinger 方程式の解に漸近する．

(iii) $\lim_{t\to\pm\infty} z(t) = 0$.

(i) は (iii) の系として得られるので, (ii) および (iii) の証明が目標である．

第 3 段では, 第 2 段で得られた座標系 (θ, ω, z_j, f) に対し座標変換を施し, Hamiltonian を扱いやすい形に変換する．このステップは 2 つの段階からなる．まず, Darboux の定理を用いて基底状態のある近傍で正準共役な座標変数を得る．次に, 得られた正準共役な座標に対して Birkhoff の定理を適用する．これは, Hamiltonian が次の 3 つの項の和で表されるような正準変換の存在を主張するものである．

- Birkhoff 標準形と呼ばれる, $z_1, \dots, z_m$ に関するある多項式
- f について 2 次の項
- z, f について十分次数の高い剰余項

第 4 段で (ii) と (iii) を証明する．(ii) は Strichartz 評価を用いる良く知られた手法で示される．(iii) を示すのが問題である．第 3 段で得られた Hamiltonian の標準形の表示を用いると, $z(t) := (z_1(t), \dots, z_m(t))$ について閉じた, 次の微分方程式が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(\omega_0)|z_j(t)|^2 = -2 \sum_{r>\omega_0} r\Im\left\langle R^+_{\mathcal{H}_{\omega_0}}(r)G(z), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} G(z) \right\rangle_{L^2} + (\text{higher order terms}). \quad (2)$$

ここで, $R^+_{\mathcal{H}_{\omega_0}}(r) := \lim_{\varepsilon\searrow 0}(\mathcal{H}_{\omega_0} - r)^{-1}$ はレゾルベントの境界値, $G(z) := \sum_{\lambda(\omega_0)\cdot\alpha=r} z^\alpha G_\alpha$, $\lambda(\omega_0) := (\lambda_1(\omega_0), \dots, \lambda_m(\omega_0))$ であって, G_α は Hamiltonian の Birkhoff 標準形に現れる $\mathbb{C}^2$-値の関数である．また, (2) の r についての和は ω_0 と N に依存して決まるある有限集合をわたる．ここで, (2) の右辺について, ある正の定数 Γ が存在して次の不等式が成立することを仮定する．

$$\sum_{r>\omega_0} r\Im\left\langle R^+_{\mathcal{H}_{\omega_0}}(r)G(z), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} G(z) \right\rangle_{L^2} \geq \Gamma \sum_{\lambda(\omega_0)\cdot\alpha>\omega_0} |z^\alpha|^2 . \quad (3)$$

この不等式を Fermi の黄金律と呼ぶ．この仮定のもとで, (2) より $z_j(t)$ の $t \to +\infty$ における減衰が従う．(NLS) の時間反転に関する対称性から $t \to -\infty$ における減衰も示される．以上により定理が示された． $\square$

注意 3. Fermi の黄金律 **(D)** は generic には成立することが知られている [3, Remark 10.6][4, Remark 13.13] が, 具体的にどのような場合に成立するのかは, 発表者の知る限りまだよく分かっていないようである．$\mathcal{H}_\omega$ の正の固有値がすべて単純なとき, (3) は見かけ上より弱い条件

$$\Im\left\langle R^+_{\mathcal{H}_{\omega_0}}(r)G(z), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} G(z) \right\rangle_{L^2} > 0 \quad (z \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\})$$

と同値である．この条件は $\operatorname{supp} G_1$ $(G = (G_1, G_2)^{\mathrm{T}})$ が $\pm\sqrt{r - \omega_0}$ を含むかどうかに関係していることが最近の計算で分かった．

参考文献

[1] H. Berestycki and P. L. Lions, Nonlinear scalar field equations I - Existence of a ground state, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **82** (1983), 313-345.

[2] T. Cazenave and P. L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, *Comm. Math. Phys.* **85** (1982), 549-561.

[3] S. Cuccagna, The Hamiltonian Structure of the Nonlinear Schrödinger Equation and the Asymptotic Stability of its Ground States, *Comm. Math. Phys.* **305** (2011), 279-331.

[4] S. Cuccagna, On asymptotic stability of moving ground states of the nonlinear Schrödinger equation, *Trans. Amer. Math. Soc.* **366** (2014), 2827-2888.

[5] S. Cuccagna and T. Mizumachi, On Asymptotic Stability in Energy Space of Ground States for Nonlinear Schrödinger Equations, *Comm. Math. Phys.* **284** (2008), 51-77.

[6] H. A. Rose and M. I. Weinstein, On the bound states of the nonlinear Schrödinger equation with a linear potential, *Physica. D* **30** (1988), 207-218.

[7] J. Shatah and W. Strauss, Instability of Nonlinear Bound States, *Comm. Math. Phys.* **100** (1985), 173-190.

[8] A. Soffer and M. I. Weinstein, Multichannel Nonlinear Scattering for Nonintegrable Equations, *Comm. Math. Phys.* **133** (1990), 119-146.

[9] Tai-Peng Tsai, Asymptotic dynamics of nonlinear Schrödinger equations with many bound states, *J. Diff. Eqns.* **192** (2003), 225-282.

[10] M. I. Weinstein, Lyapunov Stability of Ground States of Nonlinear Dispersive Equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **39** (1986), 51-68.