Brezis-Katoの正則性定理の拡張

山口　晋 [*]

大阪市立大学理学研究科数物系専攻修士 1 年, 2015 年 2 月

1　はじめに

楕円型偏微分方程式論の正則性定理の 1 つであり, 参考文献 [3] の付録にも収録されている「Brezis-Kato の定理」を扱う. 参考文献 [3] では Dirichlet 境界条件での Brezis-Kato の定理が収録されている. つまり, 次の定理が扱われている:

定理 1.1. Ω を $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ の滑らかな有界領域とし, $a(x) \in L^{N/2}(\Omega)$ とする. また $u = u(x) \in H_0^1(\Omega)$ は以下の方程式の弱解とする:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = a(x)u(x), x \in \Omega \\ u(x) = 0, \qquad\qquad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

このとき, $q < \infty$ となる任意の実数に対して $u \in L^q(\Omega)$ となる.

本稿では Neumann 境界条件での Brezis-Kato の定理も扱う. つまり, 次の定理を考える:

定理 1.2. Ω を $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ の滑らかな有界領域とし, $a(x) \in L^{N-1}(\partial\Omega)$ とする. また $u = u(x) \in H^1(\Omega)$ は以下の方程式の弱解とする:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + u(x) = 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = a(x)u(x), \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

ここで, ν は $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトルを表す. このとき, $q < \infty$ となる任意の実数に対して $u \in L^q(\partial\Omega)$ となる.

2　定理 1.1 の証明の概略

$s \geq 0$, $L \geq 0$ を定数とし, $\varphi := u \min\{|u|^{2s}, L^2\} \in H_0^1(\Omega)$ をテスト関数とする.
これを $-\Delta u = au$ の両辺に掛けて, 部分積分をすると

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u \min\{|u|^{2s}, L^2\})\, dx = \int_\Omega a u^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\}\, dx$$

[*]m14saF029@ex.media.osaka-cu.ac.jp

となる. また

$$min\{|u|^{2s}, L^2\} = \begin{cases} |u|^{2s} & in\ A := \{x \in \Omega\ ;\ L \geq |u|^s\} \\ L^2 & in\ \{x \in \Omega\ ;\ |u|^s \geq L\} \end{cases}$$

に注意して計算すると以下の不等式を得る:

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\}\ dx + \frac{s}{2}\int_A |\nabla(|u|^2)|^2 |u|^{2s-2}\ dx \leq \int_\Omega |a||u|^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\}\ dx \tag{1}$$

ここで, $u \in L^{2s+2}(\Omega)$ を仮定する. (1) を用いて $\int_\Omega |\nabla(u \min\{|u|^s, L\})|^2\ dx$ を上から評価する. このとき, Hölder 不等式などを用いて評価していく. すると, 次を得る:

$$\int_\Omega |\nabla(u \min\{|u|^s, L\})|^2\ dx \leq M \qquad (\text{ただし}, M \text{ は } L \text{ に依存しない定数}) \tag{2}$$

(2) を用いると

$$\int_A |\nabla(|u|^{s+1})|^2\ dx \leq M \tag{3}$$

(3) はすべての $L \geq 0$ に対して成立するので, $L \to \infty$ とすれば

$$|u|^{s+1} \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega) \qquad (\text{ソボレフの埋め込みによる})$$

ゆえに, $u \in L^{\frac{2N}{N-2}(s+1)}(\Omega)$

$s_0 = 0, 2s_{i+1} + 2 = \frac{2N}{N-2}(s_i + 1)(i \geq 1)$ とすれば (「Moser iteration method」)$q < \infty$ に対して $u \in L^q(\Omega)$ となる.

3　定理 1.2 の証明の概略

$s \geq 0$, $L \geq 0$ を定数とし, $\varphi := u \min\{|u|^{2s}, L^2\} \in H^1(\Omega)$ をテスト関数とする.
これを $-\Delta u + u = 0$ の両辺に掛けて, 部分積分をすると

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u \min\{|u|^{2s}, L^2\})\ dx + \int_\Omega u^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\}\ dx = \int_{\partial\Omega} au^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\}\ dS_x$$

となる. 定理 1.1 と同様に計算すると次の不等式を得る:

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\}\ dx + \frac{s}{2}\int_A |\nabla(|u|^2)|^2 |u|^{2s-2}\ dx + \int_\Omega u^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\}\ dx \leq \int_{\partial\Omega} |a||u|^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\}\ dS_x \tag{4}$$

ここで, $u \in L^{2s+2}(\Omega)$ を仮定する. このとき $\int_\Omega |\nabla(u \min\{|u|^s, L\})|^2\ dx + \int_\Omega |u \min\{|u|^s, L\}|^2\ dx$ を評価していくと次の不等式を得る:

$$\int_\Omega |\nabla(umin\{|u|^s, L\})|^2\ dx + \int_\Omega |umin\{|u|^s, L\}|^2\ dx \leq M \quad (\text{ただし}, M \text{ は } L \text{ に依存しない定数}) \tag{5}$$

(5) を用いると

$$\int_A |\nabla(|u|^{s+1})|^2 \, dx + \int_A (|u|^{s+1})^2 \, dx \leq M \tag{6}$$

(6) はすべての $L \geq 0$ に対して成立するので, $L \to \infty$ とすれば

$$|u|^{s+1} \in H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega) \qquad \text{(ソボレフの埋め込みによる)}$$

ゆえに, $u \in L^{\frac{2N}{N-2}(s+1)}(\Omega)$

$s_0 = 0, 2s_{i+1} + 2 = \frac{2N}{N-2}(s_i + 1)(i \geq 1)$ とすれば (「Moser iteration method」) $q < \infty$ に対して $u \in L^q(\Omega)$ となる. トレースソボレフの埋め込みから $u \in L^q(\partial\Omega)(q < \infty)$ となる.

4 謝辞

第 12 回城崎新人セミナーに参加させていただきありがとうございました. 運営委員の皆様には心より感謝申し上げます. 招待講演の先生方や他大学の参加者と交流することができてとても有意義な時間を過ごすことができました.

参考文献

[1] H.Brezis and T.Kato, *Remarks on the Schödinger operator with singular complex potentials 137-151*, J.Math.Pures Appl, 1979

[2] 宮島静雄, ソボレフ空間の基礎と応用, 共立出版, 2006.

[3] M.Struwe, *Variational Methods* − *Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamilton System* −, Springer, 1996.