シンプレクティック商特異点のクレパント解消と Cox 環

山岸 亮 *

京都大学数学教室，2015 年 2 月

本稿ではシンプレクティック商特異点と呼ばれる代数多様体を導入し、そのクレパント解消を Cox 環を用いて構成する手法を紹介する。

1　定義と諸結果

偶数次元 $\mathbb{C}$-ベクトル空間 $\mathbb{C}^{2n}$ を考える。その座標を $x_1, \ldots, x_n, y_1 \ldots, y_n$ とすると、$\mathbb{C}^{2n}$ 上に自然な正則シンプレクティック形式 $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$ が定まる。$G \subset GL(2n, \mathbb{C})$ を有限部分群とすると G は $\mathbb{C}^{2n}$ に線形に作用するが、ここでは次で定義されるシンプレクティックな作用のみを考える。

$$g \in GL(2n, \mathbb{C}) \text{ がシンプレクティックに作用 } \overset{\text{def}}{\iff} g^*\omega = \omega \iff g \in Sp(2n, \mathbb{C})$$

つまり G としては $Sp(2n, \mathbb{C})$ の有限部分群を考える。$\mathbb{C}^{2n}$ の G による商空間 $\mathbb{C}^{2n}/G$ には自然にアフィン代数多様体の構造が入る。対応する環は不変式環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]^G$ であり、商写像 $\mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}/G$ は部分環の包含写像に対応する。G が非自明の時 $\mathbb{C}^{2n}/G$ は特異点を持ち、これをシンプレクティック商特異点と呼ぶ。

<u>例</u>(A_1-特異点) $n = 1,\ G = \langle g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle$
g の作用 $(x_1 \mapsto -x_1, y_1 \mapsto -y_1)$ がシンプレクティックであることはすぐにわかる。不変式環を具体的に計算すると、

$$\mathbb{C}[x_1, y_1]^G = \mathbb{C}[x_1^2, x_1y_1, y_1^2] \cong \mathbb{C}[u, v, w]/(uw - v^2)$$

となって $\mathbb{C}^2/G$ は原点に孤立特異点を持つ二次曲面だとわかる。 □

$n = 1$ の場合 $Sp(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})$ であり、有限部分群 G は以下のように完全に分類されている：

G	位数	タイプ
巡回群	$l+1$	$A_l\ (l \geq 1)$
二項正二面体群	$4l$	$D_l\ (l \geq 4)$
二項正四面体群	24	E_6
二項正八面体群	48	E_7
二項正二十面体群	120	E_8

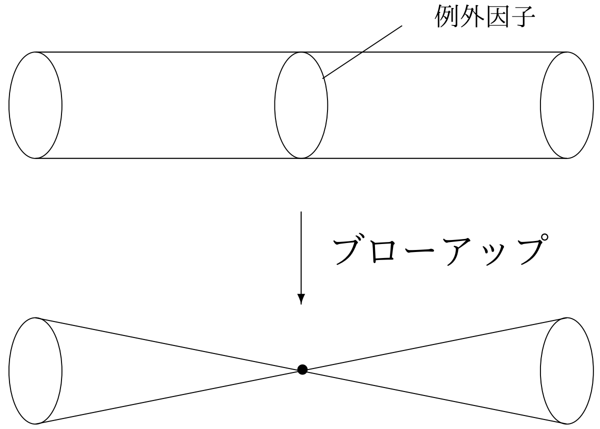
*ryo-yama@math.kyoto-u.ac.jp

これらの G による商特異点 $\mathbb{C}^2/G$ は ADE-特異点などと呼ばれていて詳しく研究されている。
特異点が与えられたときその特異点解消を考えることが自然であるが、特にその中でもクレパント解消解消と呼ばれるものに焦点を当てる。

定義 代数多様体の間の写像 $\pi : X \to Y$ が Y のクレパント解消
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (1) X:非特異
(2) $\pi^{-1}(Y - \mathrm{Sing}(Y)) \to Y - \mathrm{Sing}(Y)$ が同型
(3) π は proper 射
(4) $K_X = \pi^* K_Y (K_X, K_Y$ はそれぞれ X, Y の標準因子) □

(1)〜(3) は通常の特異点解消の定義で、(4) がクレパント性に対応している。

例 A_1-特異点の場合は特異点におけるブローアップがクレパント解消を与える (下図) :



クレパント解消によって潰れる因子を例外因子と呼ぶ。一般には例外因子はいくつかの既約成分から成る。他の ADE-特異点についても特異点でのブローアップを繰り返してクレパント解消が得られることが知られてる。
クレパント解消を考える動機付けとしては、1 つは極小モデル理論との関連である。クレパント解消は $\mathbb{C}^{2n}/G$ の非特異極小モデルにあたるので、それを探すのは自然であると思われる。もう 1 つは McKay 対応との関連である。McKay 対応とはクレパント解消の幾何学的性質と G の表現論的性質を結びつける対応であり、2 次元の場合 (ADE-特異点の場合) はそのような対応があることが知られている。これを高次元に拡張することが 1 つの目標である。
クレパント解消は一般には存在しないし、存在しても一意的とは限らない。しかし、2 次元の場合は次の事実が知られている。

事実 ADE-特異点はただ 1 つクレパント解消が存在する。

高次元においては、どの G について $\mathbb{C}^{2n}/G$ がクレパント解消を持つかは完全に分類されておらず、現在知られている (線形表現として既約な)G は以下の 4 種類しかない :

G	n
S_n	1 以上
$S_n \ltimes \Gamma^{\times n}$	1 以上
$G_4 = Q \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	2
$Q \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} D_4$	2

ただし、S_n は n 次対称群、Γ は $SL(2,\mathbb{C})$ の有限部分群、Q は四元数群、D_4 は正二面体群を表している。

2　Cox 環の導入

この節では $\mathbb{C}^{2n}/G$ がクレパント解消を持つと仮定し、その 1 つ $\pi : X \to \mathbb{C}^{2n}/G$ を固定する。$E_1,\dots,E_m$ を π の既約例外因子全体とすると、X 上の因子の線形同値類の成すアーベル群 $\mathrm{Pic}(X)$ は $\mathbb{Z}^m$ と同型になることが知られており、$\mathrm{Pic}(X)_{\mathbb{R}} := \mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とおけばこれは $E_1,\dots,E_m$ を基底にもつ $\mathbb{R}$-ベクトル空間となる。

$D \in \mathrm{Pic}(X)_{\mathbb{R}}$ に対し、$\mathbb{C}$-ベクトル空間 $H^0(X,D) = \{f \in \mathbb{C}(X)^{\times} | \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$ を考える。このとき、D に付随して代数多様体 $X_D := \mathrm{Proj}\ (\bigoplus_{k=0}^{\infty} H^0(X,kD))$ が定まる。X_D は自然に $\mathbb{C}^{2n}/G$ への写像を併せ持つことに注意する。

次に、movable cone と呼ばれる $\mathrm{Pic}(X)_{\mathbb{R}}$ の部分集合 $\mathrm{Mov}(X)$ について考える。これは基底点集合の余次元が 2 以上であるような因子から成り、原点を頂点とする凸錐を成す。$\mathrm{Mov}(X)$ は更に (ここでは定義を説明しないが) チャンバーと呼ばれる有限個の凸錐に分割される。各チャンバーに対し、その中から因子 D を取ってくる毎に X_D を考えることができる (実は X_D は D の取り方に依存しない) が、シンプレクティック商特異点の一般的な性質として次の事実がある：

<u>事実</u>　上の対応 $D \mapsto X_D$ は次の全単射を与える:

$$\{\mathrm{Mov}(X) \text{ の中のチャンバー }\} \cong \{\mathbb{C}^{2n}/G \text{ のクレパント解消 }\}$$

□

ここで X の Cox 環を次のように定義する：

$$\mathrm{Cox}(X) := \bigoplus_{(a_1,\dots,a_m)\in\mathbb{Z}^m} H^0(X, a_1E_1 + \cdots + a_mE_m)t_1^{a_1}\cdots t_m^{a_m}$$

ただし、$t_1,\dots,t_m$ は次数を明示するために付けられた不定元である。上記の事実から $\mathrm{Cox}(X)$ を計算できれば $\mathbb{C}^{2n}/G$ の全てのクレパント解消が構成できることになる。ここからは Cox 環を線形表現 G だけの情報から (初めに固定した X を構成すること無しに) 具体的に求める方法を説明する。

G の元 g は $\mathbb{C}^{2n}$ の固定部分空間 $(\mathbb{C}^{2n})^g$ の余次元が 2 の時シンプレクティックリフレクションと呼ばれる。π の例外既約因子の集合 $\{E_1,\dots,E_m\}$ とシンプレクティックリフレクションの共役類の集合は自然な 1 対 1 対応があることが知られている (McKay 対応の一種)。$g_i \in G\,(i=1,\dots,m)$ を E_i に対応する共役類の代表元とする。巡回群 $\langle g_i \rangle \subset G$ は自然に双対空間 $(\mathbb{C}^{2n})^{\vee}$ に作用し、これは 1 次元表現に分解される：$(\mathbb{C}^{2n})^{\vee} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_{2n}$.

g_i の位数を r_i とし、ζ を 1 の原始 r_i 乗根とすると、ある整数 $0 \leq a_1, \ldots, a_{2n} < r_i$ が存在して g_i は各 V_j に ζ^{a_j} 倍で作用する。この時、有理関数体 $\mathbb{C}(\mathbb{C}^{2n})$ 上の付値 $v_i : \mathbb{C}(\mathbb{C}^{2n}) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ を $v_i(x_j) = a_j\ (x_j \in V_j)$ によって定義する ($(\mathbb{C}^{2n})^\vee$ 上で定義すれば $\mathbb{C}(\mathbb{C}^{2n})$ 全体に拡張される)。一方で、v_{E_i} を X の関数体 $\mathbb{C}(X)$ 上の E_i に関する因子的付値とする。X と $\mathbb{C}^{2n}/G$ は開集合上で同型なので $\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(\mathbb{C}^{2n}/G) = \mathbb{C}(\mathbb{C}^{2n})^G \subset \mathbb{C}(\mathbb{C}^{2n})$ となることに注意する。2 つの付値 v_i と v_{E_i} は次のような関係がある：

命題([K],[IR])

$$v_{E_i} = \frac{1}{r_i} v_i|_{\mathbb{C}(X)}$$

□

この結果を用いると、不変式環 $R := \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]^G$ の生成系から Cox 環の生成系を与えることができる。R の生成系 $\phi_1, \ldots, \phi_k$ で次の条件を満たすものを考える：
「任意の $f \in R$ に対して、$\phi_1, \ldots, \phi_k$ についての単項式 $f_1, \ldots, f_l$ が存在して $f = f_1 + \cdots + f_l$ かつ全ての i, j について $v_i(f) \leq v_i(f_j)$」.

クレパント解消の Cox 環が有限生成であるという一般論によって、このような生成系がいつでも取れることがわかる。次の結果が成り立つ：

定理　$\phi_1, \ldots, \phi_k$ を上記の条件を満たす R の生成系とする。この時、

$$\{\phi_j t_1^{-\frac{1}{r_1} v_1(\phi_j)} \cdots t_m^{-\frac{1}{r_m} v_m(\phi_j)}\}_{j=1,\ldots,k} \cup \{t_1, \ldots, t_m\}$$

は $\mathrm{Cox}(X)$ の生成系となる。 □

Cox(X) を計算できると $\mathrm{Mov}(X)$ のチャンバーの構造も計算することもできる。[DW] では $G = Q \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} D_4$(第 1 節のリスト参照) の場合について Cox 環からクレパント解消が 81 個あることを示している。

3　クレパント解消を持たない場合

既に述べたように $\mathbb{C}^{2n}/G$ はクレパント解消を持つとは限らない。しかし、この場合でも前節の構成に意味を与えることができる。極小モデル理論の結果から、$\mathbb{C}^{2n}/G$ の (相対) 極小モデル $X(\to \mathbb{C}^{2n}/G)$ が常に存在することが知られている。この場合極小モデルとは、クレパント解消の定義において、非特異性の代わりに $\mathbb{Q}$-分解的端末的特異点という比較的マイルドな特異点も許したものを指す。極小モデルに対しても Cox 環を同様に定義することができる。一般の $\mathbb{C}^{2n}/G$ に対して前節の構成を実行すると、極小モデルの Cox 環が計算される。つまり、クレパント解消だけでなく、より一般に極小モデルを G から具体的に計算できることになる。

参考文献

[DW] M. Donten-Bury and J. A. Wísniewski. On 81 symplectic resolutions of a 4-dimensional quotient by a group of order 32. in preparation, 2014.

[IR] Y. Ito and M. Reid, The McKay correspondence for finite subgroups of $\mathrm{SL}(3,\mathbf{C})$, in *Higher-dimensional complex varieties (Trento, 1994)*, 221-240, de Gruyter, Berlin.

[K] D. Kaledin, McKay correspondence for symplectic quotient singularities, Invent. Math. **148** (2002), no. 1, 151–175.