

高エネルギーを探せ

八木義宗*

京都大学数学教室修士2年, 2015年2月

1 Introduction

まず次の問題を考える. G を loop のない有限グラフとする. 多重辺は許す (図 2). 次の操作を行う:

- (1) 辺と点の対に $+$ か $-$ を割り振る. (図で書き表す際は辺の両端に $+$, $-$ を書き込む.)
- (2) 一つの点から出る辺との対で $-$ のものは高々 1 つ. また各辺とその端点との対で $-$ のものは高々 1 つ.

そして, 次の言葉を用意する. 点が高エネルギーであるとは, その点とその点を境界点に持つ任意の辺との対は $+$ であること. また, 辺が高エネルギーであるとは, その辺と境界点との対が両方とも $+$ である.

例 1.1. 図 3, 図 4 の例を見ると, G 上に高エネルギーが存在するかは G の構造に依ることが分かる.

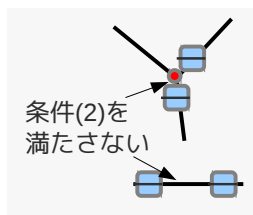


図 1: 条件 (2) を満たさない例

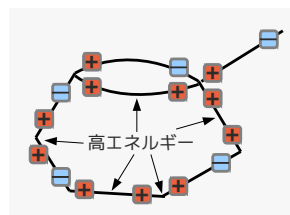


図 2: loop なし有限グラフに符号を割り振る

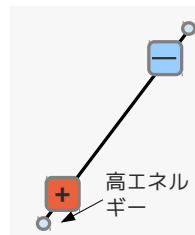


図 3: 区間の場合必ず高エネルギーが存在

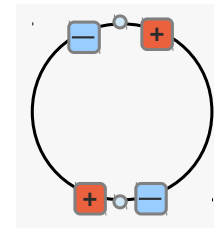


図 4: S^1 上は高エネルギーを持たないように出来る

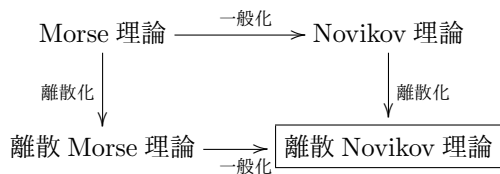
問題 G が高エネルギーを持たないようにするための必要十分条件は何か.

この問いは直接的に答えることが出来る. 興味があれば Appendix を参照せよ. ここではより強い形で示す. 即ち, どのように符号を与えれば高エネルギーの個数を最小に出来るかを, 幾何学の言葉を用いて表現する. また上記の問いはグラフという 1 次元の空間であるが, 実はこの問題は幾何学の枠組みにのるよう高次元の問題に拡張でき, 拡張した際に少なくとも種数 g の閉曲面 ($g \geq 1$) に対しては同様の議論が利用できる証明を与える.

上記の問題は幾何学の知識を必要としないが, 高次元に拡張するには問題の背景となる離散 Novikov 理

*nerve729@yahoo.co.jp

論を説明する必要がある。離散 Novikov 理論は次の図式のように Morse 理論が大基である：



Morse 理論は多様体上の“良い”関数の臨界点¹を調べることで空間の位相構造を調べる理論である。一方 Novikov 理論は、関数ではなく closed 1-form²を用いて空間の構造を調べる。多様体³ではなく一般の CW 複体⁴に対し“良い”関数を導入し空間のホモトピー型を調べるのが離散 Morse 理論である。R. Forman は [NFo] において、Novikov 理論と離散 Morse 理論を組み合わせた離散 Novikov 理論の一つの枠組みを与えた。本稿の目標は、多様体上で成立する結果が離散の場合でも成り立つか確認することである。多様体においては次の定理が知られている：

定理 1.2. (*L. Lusternik, L. Schinirelmann*)

閉多様体 M 上の C^∞ 関数 f に対し、 $\text{Crit}(f)$ で f の臨界点全体を表す時

$$\#\text{Crit}(f) \geq \text{cat}(M).$$

但し、位相空間 X に対し $\text{cat}(X) := \min \{k \mid \{F_1, F_2, \dots, F_k\}; X \text{ の開被覆で可縮.}\}$

例 1.3. 例えば円周 S^1 は図 5 のように最少 2 枚の開区間で覆えるので、 $\text{cat}(S^1) = 2$ である。従って、 S^1 上の滑らかな関数は少なくとも 2 点は臨界点を持つことが分かる。

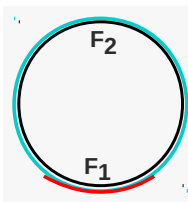


図 5: $\text{cat}(S^1) = 2$ を実現する開区間の取り方

これは関数に対しての結果であるが、closed 1-form に対しては次の結果が知られている：

定理 1.4. ([Far]) 閉多様体 M 上の closed 1-form に関しては、Morse 1-form ω に制限すると⁵、 $\text{Zero}(\omega)$ で ω の零点全体⁶を表す時

$$\#\text{Zero}(\omega) \geq \text{cat}(M, [\omega]).$$

但し、 $[\omega]$ は ω のコホモロジー類⁷を表す。 $\text{cat}(M, [\omega])$ は 3 章で定義する。

¹即ち関数の微分が消える点 (\mathbb{R} 上の関数では $f'(x) = 0$ なる x)。

²closed 1-form は局所的に関数の微分として表されるものである。臨界点を考えるには関数の微分さえ与えられれば十分である。

³例えば円周や球面、ドーナツ型のような滑らかな形の空間。

⁴例えば三角形や四面体など折れ曲がった図形などでも良い

⁵より一般の条件で M. Farber は示したが、ここではこの形で引用する。

⁶先程も注意したように closed 1-form は局所的には関数の微分で表せる。従って、closed 1-form の零点は局所的に取れる関数の臨界点となる。

⁷コホモロジー類とは closed 1-form 全体を適当な同値関係で割って出来る空間 $\{\text{closed 1-form}\} / \sim$ の元のことであり、 $[\omega]$ は ω で代表される元を表す。

この定理を離散化すると次のようになる:

問題 有限正則 CW 複体 X 上の “離散 Morse 1-form” ω は少なくとも $cat(X, [\omega])$ 個の “critical cell” を持つか.

この問いに対して得られた結果が次である:

定理 1.5. G を 1次元有限正則 CW 複体⁸ とする. G 上の任意の離散 Morse 1-form ω は, 少なくとも $cat(G, [\omega])$ 個の critical cell を持つ.

定理 1.6. $g \geq 1$ とする. 種数 g の閉曲面 Σ_g の正則セル分解における任意の離散 Morse 1-form ω は, 少なくとも $cat(\Sigma_g, [\omega])$ 個の critical cell を持つ.

以下で “離散 Morse 1-form”, “critical cell”, “ $cat(X, [\omega])$ ” を定義し, 定理 1.5 の証明を与える.

2 離散 Novikov 理論

本稿の離散 Novikov 理論の記述は最低限かつ厳密ではない. 正確な定義, 議論は [NFo] を参照せよ. X を n 次元正則 CW 複体とする. そして

$$0 \rightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_0(X) \rightarrow 0$$

を実数係数の鎖複体とする. $C_*(X) := \bigoplus_p C_p(X)$ とする. 離散 Morse 1-form を定義するために離散 form を定義する:

定義 2.1. ([NFo]) 各 $d \geq 0$ に対し,

$$\Omega^d(X) := \{ \omega : C_*(X) \rightarrow C_{*-d}(X); \text{local な線形写像} \}.$$

と定める. 各元 $\omega \in \Omega^d(X)$ を **離散 d -form** と呼ぶ.

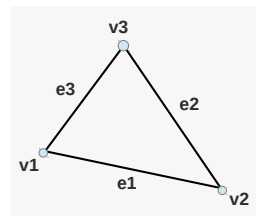
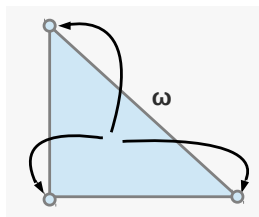


図 6: 各 cell を local な写像で送 図 7: S^1 のある regular cell decomposition とその閉包内の cell の線型和 composition

例 2.2. 図 7 のような円周 S^1 の正則 cell 分解を考えた時,

$$\omega(e_1) = 2v_1 - 3v_2, \omega(e_2) = v_2 + 2v_3, \omega(e_3) = -3v_3 + 2v_1$$

$$\omega(v_i) = 0 \quad (\forall i = 1, 2, 3)$$

で定まる線型写像 ω は離散 1-form である.

⁸即ち loop を持たない有限グラフである.

多様体上での微分形式を思い出すと、微分形式の次数を 1 つ上げる外微分なる線型写像が存在した。離散 form に対しても適切に“微分” $D : \Omega^*(X) \rightarrow \Omega^{*+1}(X)$ が定義される。 $D\omega = 0$ なる離散 1-form ω を **離散 closed 1-form** という。

記号 ω が離散 1-form なら、任意の p と任意の p -cell $\alpha^{(p)}$ に対し $\omega(\alpha^{(p)}) = \sum_{\{\gamma^{(p-1)}; \alpha \text{ の面}\}} c_{\alpha\gamma} \cdot \gamma (c_{\alpha\gamma} \in \mathbb{R})$ と表せる。この時、 $c_{\alpha\gamma}$ は α と γ の向きに依る。そこで、 $\omega(\alpha^{(p)} > \gamma^{(p-1)}) := \langle \partial\alpha, \gamma \rangle c_{\alpha\gamma}$ と定める。これは α, γ の向きによらず、cell の対にのみ依る量である。従って、この量が正か 0 以下かを考えることは意味を持つ。

以上を踏まえ離散 Morse 1-form を定義する：

定義 2.3. ([NFo]) X 上の離散 closed 1-form ω が **Morse** であるとは、次を満たすこと：
任意の p , 任意の X の p -cell α に対し、

$$(1) \#\{\beta^{(p+1)} > \alpha \mid \omega(\beta > \alpha) \leq 0\} \leq 1$$

$$(2) \#\{\gamma^{(p-1)} < \alpha \mid \omega(\alpha > \gamma) \leq 0\} \leq 1.$$

定義 2.4. ([NFo]) ある p -cell が離散 Morse 1-form の **critical p -cell** であるとは、上の 2 つの条件式における ≤ 1 を両方 $= 0$ に変えた条件式が成り立つこと。

注意 2.5. 条件 Morse と critical cell は 1 章の問題の条件 (2) と高エネルギーが対応している。

R. Forman は離散 Novikov-Morse 不等式を示した ([NFo]). 系として定理 1.5 で用いる次の補題が示せる：

補題 2.6. X を n 次元正則 CW 複体とし、 ω を X 上の離散 Morse 1-form とする。そして、 $c_p(\omega)$ で ω の critical p -cell の個数を表す。この時、 $\sum_{p=0}^n (-1)^p c_p(\omega)$ は X のオイラー数 $\chi(X) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \dim C_p(X)$ に等しい。

注意 2.7. この補題から、 G が critical cell を持たない離散 Morse 1-form を許すことと S^1 にホモトピー同値であることは同値であることが分かる。 G が S^1 にホモトピー同値ならば critical cell を持たない離散 Morse 1-form を許すことは Appendix 第 1, 2 段落を参照。 G が $S^1 \vee \dots \vee S^1$ (l 個 ($l \geq 2$) の S^1) にホモトピー同値ならば、補題 2.6 より $c_0(\omega) - c_1(\omega) = \chi(G) = 1 - l \leq -1$ なので、 $\#Crit(\omega) \geq c_1(\omega) \geq 1$ となり必ず critical cell を持つ。これで 1 章の問題に答えられた。

3 Farber-Lusternik-Schnirelman category $cat(X, \xi)$

X を有限 CW 複体とし、 $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$ とする。 ω を ξ を代表する continuous closed 1-form とする⁹。

定義 3.1. ([Far]) 対 (X, ξ) に対し定まる量 $cat(X, \xi)$ を次で定める：

$$cat(X, \xi) := \min \{k \mid \{F, F_1, F_2, \dots, F_k\}; X \text{ の開被覆. } F_j \text{ たちは可縮で, } F \text{ は次を満たす}\};$$

(*) N を任意の自然数とする。 $t \in [0, 1]$ としたとき、ホモトピー $h_t : F \rightarrow X$ で次を満たすものが存在する：

- (1) h_0 は包含 $F \hookrightarrow X$.
- (2) 任意の $x \in F$ に対して $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow X$ を $\gamma_x(t) = h_t(x)$ で定めると

$$\int_{\gamma_x} \omega \leq -N.$$

⁹continuous closed 1-form は標準的なものではないが、ここでは定義を与えない。本稿では多様体上で例を与えるが、closed 1-form に対応して構成できる continuous closed 1-form の連続な道に沿った積分値は一致する。詳しくは [Far] を参照。

例 3.2. 円周上の exact 1-form df ($f \in C^\infty(S^1)$) に対しては, θ を角度座標とした時

$$\int_{S^1} df = \int_0^{2\pi} \frac{df}{d\theta} d\theta = f(2\pi) - f(0) = 0$$

となる. 従って df に対しては, $cat(X, \xi)$ の条件 (\star) を満たす開集合 F は空集合である. 即ち $cat(S^1, [df]) = cat(S^1)$ となる. 一方, closed 1-form $d\theta/2\pi$ に対しては

$$\int_{2\pi}^0 \frac{d\theta}{2\pi} = \left[\frac{\theta}{2\pi} \right]_{2\pi}^0 = -1$$

より, 適当な向きに N 回転させるホモトピーの flow に沿った $d\theta/2\pi$ の積分値は $-N$ となる. 従って $F = S^1$ と取れ, $cat(S^1, [d\theta/2\pi]) = 0$ となる.

注意 3.3. (主に [Far]) 明らかに $cat(X, \xi) \leq cat(X)$. また, 位相空間 X が連結で $\xi \neq 0$ ならば, $cat(X, \xi) \leq cat(X) - 1$. さらに, X が弧状連結, 局所可縮でパラコンパクト¹⁰ ならば, $cat(X) \leq \dim(X) + 1$ となる. 実は, $cat(X, \xi)$ はホモトピー不変量である. 即ち $\phi: X_1 \rightarrow X_2$ をホモトピー同値写像とし, $\xi_2 \in H^1(X_2; \mathbb{R})$, $\xi_1 := \phi^* \xi_2 \in H^1(X_1; \mathbb{R})$ とすると $cat(X_1, \xi_1) = cat(X_2, \xi_2)$ となる.

4 定理 1.5 の証明

G が連結の場合に示せば, G が非連結の場合は各連結成分での結果を併せることで主張が従う. そこで, 以下では G は連結とする. その時, ある整数 $l \geq 0$ で $G \sim_H S^1 \vee \dots \vee S^1$ (l コの S^1) なるものが存在する. 但し, $l = 0$ を G がある tree にホモトピー同値であることと思う.

$\xi = 0$ のときは, 離散 Morse 不等式 ([MFo]) より,

$$\begin{aligned} c_0(\omega) &\geq b_0(G) = 1 \quad (\because G \text{ は連結}) \\ c_1(\omega) &\geq b_1(G) = b_1(S^1 \vee \dots \vee S^1) = l \end{aligned}$$

なので $\#Crit(\omega) \geq 1 + l$ である. 従って, $G \sim_H tree$ の時は, $cat(G, 0) = cat(G) = 1 \leq \#Crit(\omega)$ より良い. $l \geq 1$ の時は, 注意 3.3 より, $cat(G, 0) = cat(G) \leq \dim(G) + 1 = 2 \leq 1 + l \leq \#Crit(\omega)$ より良い. 故に, $\xi = 0$ の時は主張が成り立つ. そこで, 以下では $\xi \neq 0$ とする. $l = 1$, 即ち, $f: S^1 \xrightarrow{\sim_H} G$ の時は, $cat(X, \xi)$ のホモトピー不変性より, $cat(G, \xi) = cat(S^1, f^* \xi) = 0 \leq \#Crit(\omega)$ より良い.

$l \geq 2$ の時を考える. 注意 2.7 より, $\#Crit(\omega) \geq 1$ である. 一方, $\xi \neq 0$ より, 注意 3.3 から, $cat(G, \xi) \leq cat(G) - 1 \leq \dim(G) = 1$ となる. 故に, $\#Crit(\omega) \geq cat(G, \xi)$. 以上で定理の主張が示せた.

5 Appendix: 1章の問題の直接的な証明

G 上高エネルギーを持たないように出来ることと S^1 にホモトピー同値であることは同値である. まず, G はいくつかの loop が交わったものと仮定して良い. 実際, G が tree の場合は必ず高エネルギーを持つことが示せ (図 8), また各 loop に繋がっている tree の部分は loop に繋がっている部分を + にして, そこから + と - を交互に割り振っていけば高エネルギーを持たないように出来る (図 9).

さて, G が S^1 にホモトピー同値ならば, + と - を交互に割り振れば高エネルギーを持たないように出来る (図 10).

¹⁰連結な有限 CW 複体はこの条件を満たす.

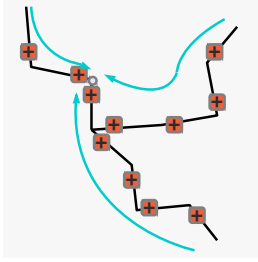


図 8: tree は必ず高エネルギーを持つ

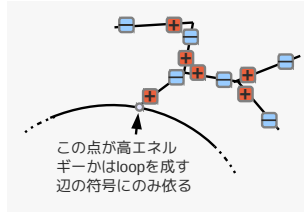


図 9: 枝は除ける

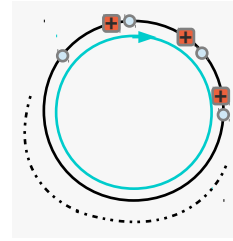


図 10: S^1 上は高エネルギーを持たないように出来る

逆に, G が高エネルギーを持たないとする. 背理法を用いる. G が $S^1 \vee \dots \vee S^1$ (1 個 ($l \leq 2$) の S^1) にホモトピー同値であるとする. G が高エネルギーを持たない事から, ある loop L_1 に着目すると, $+$ と $-$ が交互にならなければならない. 実際, もしそうでないとすると, 図 11 のように必ず条件 (2) を満たさず矛盾する.

ここで 2 の場合に分けて考える. 別の loop L_2 が L_1 といくつかの辺を共有している時 (図 12), 先程と同様に G が高エネルギーを持たない事から $+$ と $-$ が交互に並ぶ. しかしこの時, L_1 と L_2 に $-$ から $+$ に進む方向で向きを与えると, ちょうど 2 つの loop の分岐点で条件 (2) を満たさず矛盾. 一方 L_1 と L_2 がある頂点のみを共有する場合 (図 13) は, 共有する点 v を境界点を持つ L_2 の辺 e_1, e_2 との対 $(e_1, v), (e_2, v)$ は, v とそれを境界点を持つ L_1 の一方の辺との対が $-$ であることから, 条件 (2) より共に $+$ でなければならない. すると, 条件 (2) を満たし $+$ と $-$ が交互にはならないので, L_2 上に高エネルギーが存在する. これは G が高エネルギーを持たないことに矛盾.

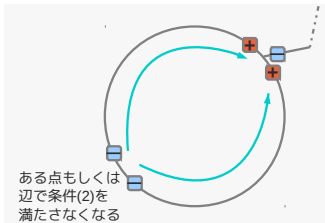


図 11: $+, -$ が交互に並ぶ

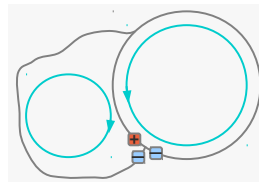


図 12: 枝別れ部分で矛盾

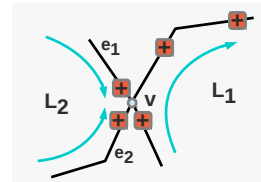


図 13: L_2 側は両方 $+$

参考文献

- [Far] M. Farber, *Topology of Closed One-Forms*, Mathematical Surveys and Monographs, volume 108, AMS (2004).
- [MFo] R. Forman, *Morse Theory for Cell Complexes*, Adv. Math., **134** (1998), pp. 90-145.
- [NFo] R. Forman, *Combinatorial Novikov-Morse Theory*, Int J. Math, 13,333 (2002).