素数の彩色に向けて

植木潤 *

九州大学大学院数理学府 D2，2015 年 2 月

概要. 本稿では、まず「数論的位相幾何学」の見方について紹介する。次にその演習として「素数の彩色数」を定義し、“妄想” を付記する。その後、新甫氏との共同研究「三次元多様体と very admissible な絡み目のイデール類体論」の概説を述べ、最後に今後の展望について、城崎での交流を通じて考えたことを交えて記す。

1　M²KR dictionary

1963 年の Mazur 氏のノートが「結び目と素数の類似」についての最初の文献と言われるが、そこには Mumford 氏から示唆されたとある。Kapranov 氏と Reznikov 氏が Max Plank 研究所でこれを辞書の形に整理し「arithmetic topology (数論的位相幾何学)」と命名した。日本では森下昌紀氏が独立に創始した ([森下])。

代数体 k（$\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k$）	有向連結閉 三次元多様体 M
素イデアル $\mathfrak{p}$（$\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_\mathfrak{p} \hookrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k$）	結び目 $K : S^1 \hookrightarrow M$
族 $S = \{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_s\}$	絡み目 $L : \sqcup S^1 \hookrightarrow M$
体の（不分岐, 分岐）拡大 F/k	多様体の（(不分岐), 分岐）被覆 $h : N \to M$
étale 基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k)$	基本群 $\pi_1(M)$
イデアル類群 $Cl(k) = I_k/P_k$	$H_1(M) = Z_1(M)/B_1(M)$
（事実： $\#Cl(k) < \infty$）	（仮定：$\#H_1(M) < \infty$（ $\underset{\text{iff}}{\iff}$ M: $\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$)）
Artin $\pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k)^{\mathrm{ab}} \cong Cl(k) \cong \mathrm{Gal}(k_{ab}^{ur}/k)$	Hurewicz $\pi_1(M)^{\mathrm{ab}} \cong H_1(M) \cong \mathrm{Gal}(M_{ab}/M)$
分岐条件付きガロア理論	分岐被覆空間の理論, [U1]
イデール類体論	[N], [NU]
岩澤理論	Alexander-Fox 理論, [U2]
$\mathbb{Z}_p$ 拡大 k_∞/k, 岩澤多項式	$\mathbb{Z}$ 被覆 $X_\infty \to X$, Alexander 多項式
肥田-Mazur 理論	Thurston の理論, [MTTU]

岩澤理論と Alexander 理論は基本群の GL_1 表現の変形理論と見ることができる。肥田-Mazur 理論や [MTTU] は 2 次元（非可換）表現の変形理論である。
踏み込んだ目的意識としては、たとえば以下がある。

(i) 古典的な代数的整数論に対して新しい知見を与える。整数論は「代数体と関数体の類似」を大事にしているが、その視点からは生まれないような結果を得たい。

(ii) 「数論はもともと量子化されている」と言われる。位相幾何の面白い “量子化” を考えたい。

(iii) 付加構造の下で関手対応を作りたい。

こうした目的のために、類似の辞書を地道に育てていく研究にも意味がある。そのなかで、類体論や岩澤理論、またその非可換化などのトポロジー版を創り育てることは由緒正しい問題と考えられる。蒲谷氏の講演の最後で紹介された Bergeron-Venkatesh や Le 氏らの仕事も、双曲多様体で岩澤理論を考えている。補空間の基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k - S)$ と $\pi_1(M - L)$ の類似に留まらない何かがあるのかどうか？ が一つの気になる点である。（あると期待している。）

この記事で扱う「分岐」について補足しておく。F/k をガロア拡大とする。k の素イデアル $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_k$ の $\mathcal{O}_F$ における素イデアル分解の様子は、$\mathfrak{p}\mathcal{O}_F = \mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r, \mathfrak{P}^e$ という基本的な 3 種類の振舞いの組み合わせで捉えられる。これらを惰性、分解、分岐という。また $h : N \to M$ を絡み目で分岐する 3 次元多様体の分岐被覆とする。結び目 $K \subset M$ を取ると、逆像 $h^{-1}(K)$ の様子は惰性（伸びる）、分解、分岐（h の $h^{-1}(K)$ への制限が一対一写像になる）という基本的な 3 つの場合の組み合わせで理解できる。

なお本稿では紙面の都合で十分な文献表を付けられなかった。「代数的整数論とその周辺 2014」報告集などを合わせてご参照いただきたい。

*uekijun46@gmail.com

2　彩色

一昨年末に RIMS で行われた研究集会「代数的整数論とその周辺 2013」で藤原一宏氏の言葉が印象的だった。曰く「よく誤解されるが、私は大きな問題ではなく、小さな問題から始めるのです。」

素数の彩色の研究は、まだ始まっていないとも言えるが、この一つの種子が、いつか天野氏の 4 つ組の素数に対するミルナー不変量の研究のような仕事につながることを期待している。

2.1　絡み目の彩色（[P]）

定義. S^3 内の絡み目 L を、上下関係の情報を残して $\mathbb{R}^2$ 上に射影した図式を考える。その各 arc に R, G, B の三色から選んで色を付ける方法であって、図式中の各交点において「異なる色の arc の下を潜ると色が変わる」ようなものを 3 彩色といい、その総数を **3 彩色数**といい $col_3(L)$ と書く。

同様に、図式の各 arc に $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元を対応させる方法で、「各交点において、下の 2 つの arc に対応する数の和が上の arc に対応する数の 2 倍である」ものを n 彩色という。その総数を n **彩色数**といい $col_n(L)$ と書く。

図式のライデマイスター変形で彩色数が不変であることが容易に確かめられ、これらは絡み目の位相不変量であることが分かる。例えば 3 彩色数を見ると 三葉結び目 $\neq$ 自明な結び目 が言える。

命題 2.1. 絡み目の図式の一部に着目する。一枚の帯の上に二本の糸を並行にのせ、それを帯ごと n 回半捻りすると、新しい絡み目を得る。この操作を n **half-twists** という。n 彩色数は n half-twists で保たれる。

彩色数には、絡み目群や分岐被覆のホモロジーを用いた解釈がある：

命題 2.2. n 彩色は、補空間の基本群から二面体群への準同型 $\pi_1(S^3 - L) \to D_n$ であって "偶数長の元" を 1 に送るものと一対一に対応する。さらに、L でちょうど分岐する S^3 の二重分岐被覆 $h : M \to S^3$ が一意に存在するが、準同型 $H_1(M) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と $n : 1$ に対応する。

また、ジョーンズ多項式の特殊値や、統計物理学における状態和の考えを用いた解釈もある。さらに、一般の群やカンドルなどによる彩色も考えられている。枠付絡み目や曲面結び目に対しても理論の拡張がある。

2.1.1　素数の族の彩色

$S = \{p_1, ..., p_r\} \subset \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ を素数と無限素点からなる有限集合とする。S で分岐する $\mathbb{Q}$ の二次拡大 k を考える。これは存在すれば一意であり、存在しないのは以下の 2 つの場合である。

(1) S が 4 で割ると 3 余る素数を奇数個含み、$\infty, 2$ を含まないとき。

(2) S が 4 で割ると 3 余る素数を偶数個含み、∞ を含み、2 を含まないとき。

なお $\infty \notin S \underset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} k$ が総実である。このような S に対して、$\infty \in S$ ならば最大 S 外不分岐ガロア群、$\infty \notin S$ ならば最大 S 外不分岐総実ガロア群を G_S と書き、$\pi_1(S^3 - L)$ の類似物と見る。

定義. この群から二面体群への準同型 $G_S \to D_n$ であって "偶数長の元" を 1 に送るものを S の n 彩色と呼ぶことにする。その個数を n 彩色数と呼び $col_n(S)$ と書く。

命題 2.3. n 彩色は $Cl(k)_{(n)} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と $n : 1$ に対応する。

二次体の類群は古典的な理論として知られている。例えば次がすぐ分かる。

例 2.4. 非自明な 3 彩色を持つ最小の素数は 23 である。

絡み目の彩色数が n half-twists で保たれたことの類似として、次が考えられる。

問題 2.5. 集合 $\{S$ の全体 $\}$ 上の適当な同値関係であって彩色数を保つものを見つけよ。

この応用、野心的な目標として例えば次がある。

予想 2.6 (Gauss)**.** 類数 1 の実二次体は無数にある。

これを弱めた命題「$p \neq q$ を素数とするとき、類数が pq で割れない二次体が無数にある」が真であることは、$pq = 6$ の場合が Belabas-Fouvry の論文 (1999) で示されているのみである。

妄想. これは最初の「図式から定まる素数の不変量」と言えるかもしれない。ジョーンズ多項式の直接の対応物はまだ提案されていないと思う。状態和の考えはゼータ関数と相性が良いと聞く。カンドルの心が「余次元 2」ならば数論に適用できても良さそうだ。ミルナー不変量との関係はどうか。高次のスキームに対してはどうか。3 次元多様体と絡み目の不変量である Casson 不変量はユニタリ表現の個数を正規化して数えるが、表現の個数を数えるという点が共通している。

3　新甫のイデール理論（[N], [NU]）

九大の新甫氏が修士論文 [N] の中で提案された枠組みについて、研究を徹底させたのが [NU] である。Sikora 氏の personal note の内容に一通り答えるという差当りの目標は達成された。研究集会「結び目の数学 VII」報告集の新甫氏の記事と本稿を併せると要所が尽くされるだろう。なお本稿では簡単のため、大域理論については、Hurewicz 同型を固定し、群を同一視して記述する。

3.1　数体と結び目の局所類体論

局所体 $k_{\mathfrak{p}}$ に対して、次の完全列の可換図式がある。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times} \arrow[r] \arrow[d] & k_{\mathfrak{p}}^{\times} \arrow[r, "v_{\mathfrak{p}}"] \arrow[d, "\rho_{\mathfrak{p}}"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Gal}(k_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}/k_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ur}}) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(k_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}/k_{\mathfrak{p}}) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(k_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ur}}/k_{\mathfrak{p}}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

右上の $v_{\mathfrak{p}}$ は付値と呼ばれる。中央の縦は局所類体論の基本写像と呼ばれる単射準同型で稠密な像を持つ。左下は惰性群 $I_{\mathfrak{p}}$ のアーベル商である。右下については $\mathrm{Gal}(k_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ur}}/k_{\mathfrak{p}}) \cong \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}}/\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) \cong \hat{\mathbb{Z}}$ が成り立つ。

局所体の拡大は事情が複雑で、非アーベルがあるし、分岐には wild と tame の二通りがある。特に tame 商を見ると、$1 \to I_{\mathfrak{p}}^{t} = \langle \tau \rangle \to \pi_1^t(\mathrm{Spec}(k_{\mathfrak{p}})) = \langle \tau, \sigma | \tau^{q-1}[\tau, \sigma] \rangle \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}}/\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) = \langle \sigma \rangle \to 1$ という完全列がある。ここに τ はモノドロミー、σ はフロベニウスと呼ばれる。

次に結び目 $K \subset M$ に対し、管状近傍を V_K と書く。その境界の 2 次元トーラス ∂V_K の基本群はアーベルであるから、結び目のほうの局所理論は簡単である。元 $\mu_K, \lambda_K \in H_1(\partial V_K)$ を K のメリディアンとロンジチュードとする。各多様体 X の普遍被覆を $\widetilde{X} \to X$ と書く。次の完全列の可換図式がある。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \langle \mu_K \rangle \arrow[r] \arrow[d] & H_1(\partial V_K) \arrow[r, "v_K"] \arrow[d, "\mathrm{Hur.}"] & H_1(V_K) = \langle \lambda_K \rangle \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\widetilde{\partial V_K}/\widetilde{\partial V_K}) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\widetilde{\partial V_K}/\partial V_K) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\widetilde{V_K}/V_K) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

左上について同型 $\partial_* : H_2(V_K, \partial V_K) \overset{\cong}{\to} \langle \mu_K \rangle$ が成り立つ。「辞書」によれば単数と曲面の類が対応するが、局所でもそうなっている。中央の群は $\pi_1(\partial V_K) = \langle \mu_K, \lambda_K | [\mu_K, \lambda_K] \rangle \cong H_1(\partial V_K) \cong \mathbb{Z}^2$ となっており、数論の tame の場合はこれが “量子化” されたものと見れる。付値に対応する写像 v_K は、包含 $\partial V_K \hookrightarrow V_K$ が導く射である。縦は全て Hurewicz の同型であり、左下は K の惰性群 $I_K = \mathrm{Gal}(\widetilde{\partial V_K}/\widetilde{\partial V_K})$、右下は $\mathrm{Gal}(\widetilde{V_K}/V_K) \cong \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ となっている。

3.2　数体の類体論

数体 k に対し、**イデール群**を制限直積によって次のように定義する。

$$\mathbb{I}_k := \prod_{\mathfrak{p}} k_{\mathfrak{p}}^{\times} = \left\{ (a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \prod_{\mathfrak{p}:\ \mathrm{prime}} k_{\mathfrak{p}}^{\times} \;\middle|\; v_{\mathfrak{p}}(a_{\mathfrak{p}}) = 0 \text{ for almost all finite primes } \mathfrak{p} \right\},$$

すると**主イデール群** $\mathbb{P}_K := \mathrm{Im}(k^{\times} \hookrightarrow \mathbb{I}_K)$、**イデール類群** $\mathbb{C}_k := \mathbb{I}_k/\mathbb{P}_k$ が定められる。さらに**単イデール群** $\mathbb{U}_k := \mathrm{Ker}(\prod v_{\mathfrak{p}}) < \mathbb{I}_k$ を考えると、同型 $\mathbb{I}_k/(\mathbb{U}_k \cdot \mathbb{P}_k) \cong Cl(k)$ がある。

イデール類群 $\mathbb{C}_k$ には二つの自然な位相が入って位相群となる。一つは**ノルム位相**と呼ばれ、有限次アーベル拡大のイデール類群のノルムによる像が 0 の基本近傍系を成す。もう一つは、ここでは**標準位相**と呼ぶ。まず局所理論で局所ノルム位相を考え、$\mathbb{I}_k$ に制限直積位相と呼ばれる位相を導入する。制限直積位相は直積位相よりも開集合が多い。その商位相として得られるものを考える。

ここで考える体は全て複素数体 $\mathbb{C}$ の中に固定されているものとする。群 $\mathrm{Gal}(k_{\mathrm{ab}}/k) = \varprojlim_{F/k:\ \mathrm{fin.ab.}} \mathrm{Gal}(F/k)$ について次が成り立つ（ノイキルヒ「代数的整数論」、加藤・黒川・斎藤「数論 I」など）。

定理 3.1 (GCFT)**.** 稠密な像を持つ自然な単射準同型 $\rho : \mathbb{C}_k \to \mathrm{Gal}(k_{\mathrm{ab}}/k)$ があって次を満たす。
(1) 局所理論と整合的である。
(2) (Artin 相互律) 任意の有限次アーベル拡大 F/k に対し、同型 $\mathbb{C}_k/\mathrm{Nr}\mathbb{C}_F \cong \mathrm{Gal}(F/k)$ を導く。
(3) (存在定理) $\{H < \mathbb{C}_k \,|\, \text{open w.r.t. ノルム位相}\} = \{H < \mathbb{C}_k \,|\, \text{open w.r.t. 標準位相, 指数有限}\}$ と $\{\mathbb{C}/F/k \,|\, F \text{ は } k \text{ の有限次アーベル拡大}\}$ の間に自然な全単射を導く。

なお (2) からは例えば平方剰余の相互法則が従うことが知られている。

3.3 Very admissible link

以下では 3 次元多様体 M を固定し有向連結閉を仮定する。数体の素イデアルの全体の対応物を定める：

定義 ([N],[NU])**.** $\mathcal{K} \subset M$ が **very admissible link** であるとは、次を満たすことである。
(1) 可算成分の絡み目である。(2) 管状近傍 $V_{\mathcal{K}} = \sqcup_K V_K$ を備える。(3) $\mathcal{K}$ 内の有限絡み目で分岐する任意のアーベル被覆 $h : N \to M$ に対して、$H_1(N)$ が逆像 $h^{-1}(\mathcal{K})$ の成分たちによって生成される。

例えば S^3 内の自明な結び目は very admissible である。トレフォイルを含む very admissible link は無限成分の絡み目である。以下では絡み目といったら成分が可算無限個あっても良く、管状近傍を備えるとする。

定理 3.2 ([NU])**.** M 内の任意の絡み目 L に対し、L を含む very admissible link $\mathcal{K}$ が存在する。

ここではより強く、定義の条件 (3) から「アーベル」を外したものの構成を述べる。次を用いる。

補題 3.3. L が M 内の絡み目のとき、L を含むある絡み目 $\mathcal{L}$ があって、L 内の有限絡み目で分岐するような任意の有限次被覆 $h : N \to M$ に対し、$H_1(N)$ を $\mathcal{L}$ の逆像の連結成分たちが生成する。

証明: 分岐被覆は分岐成分の補空間の不分岐被覆から Fox 完備化によって得られ、不分岐被覆は基本群の部分群と、被覆のガロア理論によって一対一に対応する。各有限絡み目 $L' \subset L$ に対し、有限生成群 $\pi_1(M - L')$ の指数有限部分群は可算個であることに気をつけると、そのような分岐被覆は可算個であるから、その全体の集合を $\{h_i : N_i \to M\}_{i \in \mathbb{N}}$ と書く。絡み目の包含列 $\{L_i\}_i$ を次のように再帰的に構成し、$\mathcal{L} = \cup L_i$ とおけばよい。まず $L_{-1} = L$ とする。次に $i \in \mathbb{N}$ に対し、L_{i-1} が与えられていたとする。N_i はコンパクトなので $H_1(N_i)$ は有限生成である。よって N_i 内の絡み目 $\widetilde{L_i}$ であって、$h^{-1}(L_{i-1})$ を含み、その成分たちが $H_1(N_i)$ を生成し、像 $h_i(\widetilde{L_i})$ が再び M の絡み目になるものが取れる。ここで $L_i := h_i(\widetilde{L_i})$ と置く。 □

証明 (定理): M 内の絡み目の包含列 $\{\mathcal{K}_i\}_i$ を次のように再帰的に構成し、$\mathcal{K} := \cup \mathcal{K}_i$ とすればよい。まず $\mathcal{K}_{-1} = L$ と置く。つぎに $i \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{K}_{i-1}$ が与えられていたとし、$\mathcal{K}_{i-1}$ から補題によって得られる絡み目を $\mathcal{K}_i$ とする。 □

Remark. さらに、「絡み目が H_1 を生成する」という条件を強めて、「絡み目の各成分と基点を途中で交わらない path でつなぎ向きを与えたものたちが基本群を生成する」とすることもできる。

3.4 新甫のイデール

以下では M 内に very admissible link $\mathcal{K}$ を固定する。また各連結成分 $K \subset \mathcal{K}$ に対し、メリディアンとロンジチュード $\mu_K, \lambda_K \in H_1(\partial V_K)$ を固定する。対 $(M, \mathcal{K})$ の**イデール群**を次のように定める。

$$\mathbb{I}_{M,\mathcal{K}} := \prod_{K \subset \mathcal{K}}{}' H_1(\partial V_K) = \left\{ (a_K)_K \in \prod_{K \subset \mathcal{K}} H_1(\partial V_K) \;\middle|\; v_K(a_K) = 0 \text{ for almost all } K \right\}.$$

また、群 $G_{\mathrm{ab}} := \varprojlim_{L \subset \mathcal{K} \text{ finite}} H_1(M - L)$ を $\mathrm{Gal}(k_{ab}/k)$ の対応物として考え、**主イデール群**と**イデール類群**を $\mathbb{P}_{M,\mathcal{K}} = \mathrm{Ker}(\mathbb{I}_{M,\mathcal{K}} \to G_{\mathrm{ab}})$ と $\mathbb{C}_{M,\mathcal{K}} := \mathbb{I}_{M,\mathcal{K}}/\mathbb{P}_{M,\mathcal{K}}$ で定義する。（ここで $\mathbb{P}_{M,\mathcal{K}}$ は $\varprojlim_{L \subset \mathcal{K}} H_2(X_L, \partial X_L), X_L := M - V_L$ の適当な部分群の $\mathbb{I}_{M,\mathcal{K}}$ における像であり、単数と曲面の類似の自然な拡張と見れる。）さらに**単イデール群** $\mathbb{U}_{M,\mathcal{K}} := \mathrm{Ker}(\prod v_K) < \mathbb{I}_{M,\mathcal{K}}$ を定めると、これはメリディアンたちで生成される。同型 $\mathbb{I}_{M,\mathcal{K}}/(\mathbb{U}_{M,\mathcal{K}} + \mathbb{P}_{M,\mathcal{K}}) \cong H_1(M)$ がある。

イデール類群 $\mathbb{C}_{M,\mathcal{K}}$ には二つの自然な位相が入り位相群となる。一つは**ノルム位相**と名付けられ、これは各有限次分岐アーベル被覆のイデール類群の像を 0 の基本近傍系とするものである。もう一つは標準位相と名付けられ、これは局所ノルム位相の制限直積位相の商位相として定義される。もし M が有理ホモロジー球面ならばこの二つは一致するが、一般には異なる。

3.5 3 次元多様体のイデール類体論

定理 3.4 (GCFT;[N],[NU])**.** 自然な同型 $\mathbb{C}_{M,\mathcal{K}} \overset{\cong}{\to} G_{\mathrm{ab}} = \varprojlim_{L \subset \mathcal{K} \text{ finite}} H_1(M-L)$ があって次を満たす。

(1) 局所理論と整合的である。
(2) (大域相互律) $\mathcal{K}$ 内の有限絡み目で分岐する任意の有限次アーベル被覆 $h : N \to M$ に対して、同型 $\mathbb{C}_{M,\mathcal{K}}/h_*(\mathbb{C}_{N,h^{-1}(\mathcal{K})}) \cong \mathrm{Gal}(h)$ を導く。
(3) (存在定理) $\{H < \mathbb{C}_{M,\mathcal{K}} \,|\, \text{open w.r.t. ノルム位相}\} = \{H < \mathbb{C}_{M,\mathcal{K}} \,|\, \text{open w.r.t. 標準位相, 指数有限}\}$ と $\{\mathcal{K}$ 内の有限絡み目で分岐する有限アーベル被覆 $h : N \to M$の基点付き同型類$\}$ の間に自然な全単射を導く。

Remark. 「基点付き被覆の同型類」を考えることは、固定された十分大きな体（例えば $\mathbb{C}$）の中で数体を考えることに対応する。実際、数論幾何では $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \to \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k$ が基点と呼ばれる。逆に M の「$\mathcal{K}$ 分岐最大アーベル被覆」を副有限被覆として取り、その商として得られる有限次被覆全体の集合を考えてもよい。

定理の証明は、$\mathbb{I}_{M,\mathcal{K}} = (\text{meridian part}) \oplus (\text{longitude part}) \cong \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \oplus \mathbb{Z}^{\oplus \mathbb{N}}$ から $\mathbb{C}_{M,\mathcal{K}}$ への商写像が扱いやすい商を経由することに気をつければ、あとは概ね自然である。数論の方では「**ノルム剰余記号**」を導入して行われる証明があるが、結び目のほうでも、そのようにもできる。ノルム剰余記号の特別な場合としてルジャンドル記号と mod 2 の絡み目数を同じように見ることができる。

他に、数論では、**類体公理**から導く方法もあった。$(M, \mathcal{K})$ のイデール群やイデール類群の Tate cohomology は、ノルムとトレースの役割が部分的に逆転しており、惰性成分を余計に数えてしまうため、見た目が異なる。

3.6 展望など

新甫氏によって提案されたこの枠組について、今後やるべき由緒正しい問題はまだまだ無数にあるが、枠組み自体を検討するという方向性もある。機密に支障のない範囲で研究のメモを記す。

• 非アーベル版を考える。コホモロジーをベースに書き換える。• 無限素点の類似物は $\mathrm{End}\, M$ だと言われる。今回は M が閉を仮定しているので空であるが、Hajir 氏の研究がある。• 積公式が成り立つような別の枠組みを Kopei 氏が提案している。• また別の枠組みだが、虚数乗法の類似について Conne-Marcolli-Ramachandran の研究がある。• Kummer 対と Blanchfield 対の類似がある一方で、河澄氏の Morita-Mumford 類の研究が高次 Kummer 理論に当たると指摘されている。• ゼータ関数と絡ませたい。岩澤理論、肥田理論の類似を合わせて考えてゆきたい。• 多重ゼータ値とジョーンズ多項式の関係について Le-村上の研究を、近年になって古庄氏が発展させている。FMZV との関係が気になる。• 双曲結び目補空間の双曲体積とゼータ値が概念的に対応する。P.Scholze 氏も数論的双曲 3 次元多様体の体積を perfectoid や Galois 表現との関係で議論している。• 関真一朗氏から「結び目の素数定理はあるか」と訊かれた。結び目の全体は連結和についてモノイドを成す。図式の最小交点数による順序を入れて自然数で添字付けると、$\pi(n) := \frac{\#\{K_i \,|\, i \leq n, \text{prime knot}\}}{\#\{K_i \,|\, i \leq n\}}$ の振舞いを定式化できる。ほかに既存の研究として、砂田利一「基本群とラプラシアン」の中で測地線の素数定理が議論されている。また McMullen 氏の論文でチェボタレフ密度定理の類似が示されている。• 「オイラーシステムはあるか」とも訊かれ、探しているところです、と答えた。代数幾何の方でも探しているところだと聞いたことがある。むしろ結び目から示唆を得て、オイラーシステムを用いずにセルマー群を直接叩く研究があるらしい。• 「一元体」の考えは、数論において “準古典極限” を取ることだとも説明されるが、理解のために結び目での類似の考察が意味を持つと考えられる。

謝辞. 運営委員の方たち、出資してくださった先生方、城崎でコメントを下さった蒲谷祐一、関真一朗、平川義之輔の各氏、また彩色について議論したり、本原稿に目を通しコメントを下さったりした、木村巌、古川遼、三原朋樹、新甫洋史の各氏らに感謝します。本研究は JSPS 科研費 (25-2241) の助成を受けたものです。

参考文献

[森下] 森下昌紀, 「結び目と素数」, シュプリンガー・ジャパン (丸善), 2009 (2013).

[P] Józef H. Przytycki, *3-coloring and other elementary invariants of knots*, In Knot theory (Warsaw, 1995), volume 42 of Banach Center Publ., pages 275–295. Polish Acad. Sci., Warsaw, 1998.

[MTTU] Masanori Morishita, Yu Takakura, Yuji Terashima, and Jun Ueki, On the universal deformations for SL2-representations of knot groups, submitted. (on arXiv.)

[N] Hirofumi Niibo, *Idèlic class field theory for 3-manifolds*, Kyushu J. Math, Kyushu J. Math **68** (2014), no. 2, 421–436.

[NU] Hirofumi Niibo and Jun Ueki, *Idèlic class field theory for 3-manifolds and very admissible links*, submitted. (on arXiv.)

[U1] Jun Ueki, *On the homology of branched coverings of 3-manifolds*, Nagoya Math. J. **213** (2014), 21–39.

[U2] Jun Ueki, *On the Iwasawa invariants for links and Kida's formula*, submitted.