

特性曲線有限要素法の理論と応用

内海 晋弥*

早稲田大学大学院基幹理工学研究科, 2015年2月

1 はじめに

本稿では, 移流拡散方程式を扱い, 流れ問題に対する数値解法である特性曲線有限要素法を紹介する.

移流拡散方程式や Navier–Stokes 方程式のように, 移流項が支配的な問題において, Galerkin 有限要素法は不安定である. 特性曲線有限要素法 (Lagrange–Galerkin 法とも呼ばれる) はこれらの流れ問題に対して有効な手法である. 本手法に関しては [1, 2, 3, 4, 5] などを参照していただきたい. Galerkin 有限要素法と異なり, 物質微分項 $\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi$ を直接近似する. さらに, 最終的に解くべき連立一次方程式に現れる係数行列が対称で, 時間に依存しないという特長を持っており, 効率的な計算を行うことができる.

しかし, 特性曲線有限要素法で現れる, 合成関数項の積分計算を厳密に行うことは一般には不可能である. そのため, 従来はそこに数値積分が用いられたが, 粗い数値積分は不安定な数値結果を導くことが知られている [4]. 一方, 我々は厳密に積分ができるスキームを作成した.

本稿では従来の特性曲線有限要素スキームと数値積分誤差を伴わないスキームを紹介する.

本報告は田端正久氏 (早稲田大学理工学術院) との共同研究に基づくものである.

2 準備

$\phi : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ を未知関数とする移流拡散問題 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi - \nu \Delta \phi &= f, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \phi &= 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ \phi &= \phi^0, & x \in \Omega, t = 0, \end{aligned}$$

を考える. ここに, Ω は $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ の多角形領域, $\partial\Omega$ はその境界, $T > 0$ は時刻, $\nu > 0$ は拡散係数, $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi^0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ はそれぞれ与えられた関数である. $u(x, t) = 0 ((x, t) \in \partial\Omega \times (0, T))$ を仮定する.

まず, 時間方向の離散化の方法を述べる. $\Delta t > 0$ を時間刻み, $N_T \equiv \lceil T/\Delta t \rceil$ を総ステップ数, $t^n \equiv n\Delta t$ とし, $\phi^n \equiv \phi(\cdot, t^n)$ とする. u^n なども同様である.

*su48@fuji.waseda.jp

u を滑らかと仮定して、特性曲線 $X(t; x, s)$ を常微分方程式系

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t; x, s) = u(X(t; x, s), t), & t < s, \\ X(s; x, s) = x \end{cases}$$

の解として定義する。これを用いると物質微分項 $(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla)\phi$ は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla\right)\phi(X(t), t) = \frac{d}{dt}\phi(X(t), t)$$

と書ける。 $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ に対して、写像 $X_1(w) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ を

$$(X_1(w))(x) \equiv x - w(x)\Delta t.$$

で定める。写像 $X_1(u(\cdot, t))$ は $X(t - \Delta t; x, t)$ の Euler 近似である。記号 \circ は関数の合成 $(g \circ f)(x) \equiv g(f(x))$ を表す。

これらの記号を用いると物質微分項を $\frac{\phi^n - \phi^{n-1} \circ X_1(u^n)}{\Delta t}$ で近似することができ、

$$\frac{\partial \phi^n}{\partial t} + u^n \cdot \nabla \phi^n - \frac{\phi^n - \phi^{n-1} \circ X_1(u^n)}{\Delta t} = O(\Delta t) \quad (1)$$

が成り立つ。このことは Taylor 展開

$$\begin{aligned} (\phi^{n-1} \circ X_1(u^n))(x) &= \phi(x - u^n(x)\Delta t, t^{n-1}) \\ &= \phi(x, t^n) - \Delta t \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t^n) + u^n(x) \cdot \nabla \phi(x, t^n) \right) + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

から分かる。また、(1) の $O(\Delta t)$ の項を具体的に書くと次のようになる：

$$y(x, s) = x + (s - 1)\Delta t u^n(x), \quad t(s) = t^{n-1} + s\Delta t$$

と置くと、

$$\frac{\phi^n - \phi^{n-1} \circ X_1(u^n)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} [\phi(y(\cdot, s), t(s))]_{s=0}^1$$

が成り立つことから

$$\begin{aligned} ((1) \text{ の左辺}) &= \frac{\partial \phi^n}{\partial t} + u^n \cdot \nabla \phi^n - \int_0^1 \left\{ u^n(\cdot) \cdot \nabla \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} (y(\cdot, s), t(s)) ds \\ &= \Delta t \int_0^1 ds \int_s^1 \left\{ \left(u^n(\cdot) \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \phi \right\} (y(\cdot, s_1), t(s_1)) ds_1, \end{aligned}$$

ここに、

$$\left(u^n \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 = \sum_{i,j=1}^d u_i^n u_j^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \sum_{i=1}^d u_i^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

次に、空間方向の有限要素近似について述べる。 $\mathcal{T}_h = \{K\}$ を $\bar{\Omega}$ の三角形 ($d = 2$) または四面体 ($d = 3$) 分割 (図 1), $h \equiv \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K)$ を最大要素長とする。本稿では三角形が“つぶれない”正則な三角形分割列 $\{\mathcal{T}_h\}_{h \downarrow 0}$ を考える。 k を正整数として、 P_k 有限要素空間 $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ を

$$V_h \equiv \{v_h \in C(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega); v_h|_K \in P_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

で定める。ここに、 $P_k(K)$ は K 上の高々 k 次多項式の集合を表す。 P_1, P_2 空間の基底関数の例を図 2 に示した。

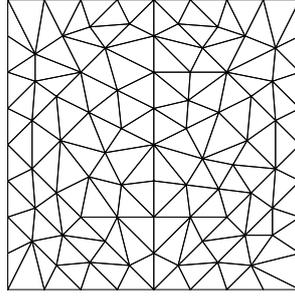


図 1: $\bar{\Omega}$ の三角形分割.

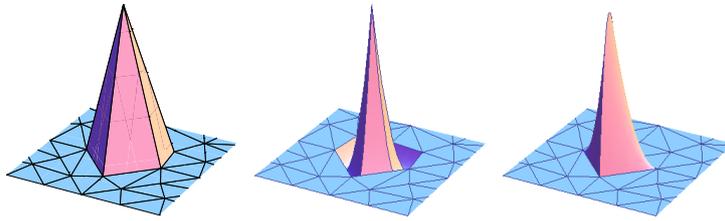


図 2: 有限要素空間の基底関数. P1(左), P2(中, 右).

3 特性曲線有限要素スキーム

$\Pi_h^{(k)} : C(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h$ を P_k 有限要素空間への Lagrange 補間作用素とする. 括弧 (\cdot, \cdot) は $L^2(\Omega)$ の内積を表す. 従来の特性曲線有限要素スキームは次で定義される.

スキーム 0. $\phi_h^0 = \Pi_h^{(k)} \phi^0$ とする. 次を満たす $\{\phi_h^n\}_{n=1}^{N_T} \subset V_h$ を求めよ:

$$\left(\frac{\phi_h^n - \phi_h^{n-1} \circ X_1(u^n)}{\Delta t}, \psi_h \right) + \nu(\nabla \phi_h^n, \nabla \psi_h) = (f^n, \psi_h), \quad \forall \psi_h \in V_h,$$

$n = 1, \dots, N_T$.

合成関数項 $(\phi_h^{n-1} \circ X_1(u^n), \psi_h)$ が厳密に積分されると仮定すれば, 数値解の安定性と, 厳密解への収束性を示すことができる [1].

関数 ϕ_h^{n-1} は要素 K 上で多項式であるが, 合成関数 $\phi_h^{n-1} \circ X_1(u^n)$ は一般には K 上で多項式でない. 像 $X_1(u^n)(K)$ が複数の要素に跨るからである (図 3 左). ゆえに $(\phi_h^{n-1} \circ X_1(u^n), \psi_h)$ を厳密に積分することは困難である. 現実的にはそこに数値積分が使われる. しかし, 数値積分誤差を用いるスキームの収束性は得られておらず, さらに, 粗い数値積分を用いると不安定になりうる [4, 6].

数値積分誤差を伴わないスキームを述べる.

スキーム 1. $\phi_h^0 = \Pi_h^{(k)} \phi^0$ とする. 次を満たす $\{\phi_h^n\}_{n=1}^{N_T} \subset V_h$ を求めよ:

$$\left(\frac{\phi_h^n - \phi_h^{n-1} \circ X_1(\Pi_h^{(1)} u^n)}{\Delta t}, \psi_h \right) + \nu(\nabla \phi_h^n, \nabla \psi_h) = (f^n, \psi_h), \quad \forall \psi_h \in V_h,$$

$n = 1, \dots, N_T$.

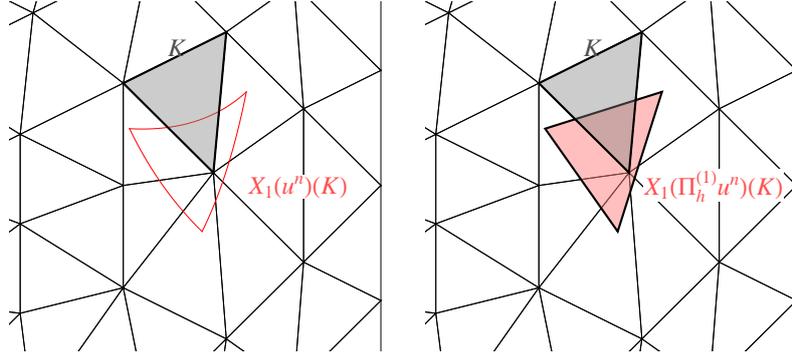


図 3: 要素 K とその像 $X_1(u^n)(K)$ (左), $X_1(\Pi_h^{(1)}u^n)(K)$ (右) .

局所線形化流速場 $\Pi_h^{(1)}u^n$ を用いることにより, 要素 K の像 $X_1(\Pi_h^{(1)}u^n)(K)$ は三角形となる (図 3 右). 積分 $(\phi_h^{n-1} \circ X_1(\Pi_h^{(1)}u^n), \psi_h)$ は厳密に行うことができる.

スキーム 1 は本質的に無条件安定であり, 厳密解 ϕ と与えられた流速 u の滑らかさの仮定と適切な Δt の制限の下

$$\|\phi - \phi_h\|_{\ell^\infty(L^2)} + \sqrt{\nu} \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{\ell^2(L^2)} \leq c(h^k + h^2 + \Delta t)$$

を示すことができる. ここに, $\psi = \{\psi^n\}_{n=0}^{N_T}$ に対して

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{\ell^\infty(L^2)} &\equiv \max\{\|\psi^n\|_{L^2(\Omega)}; n = 0, \dots, N_T\}, \\ \|\psi\|_{\ell^2(L^2)} &\equiv \left(\Delta t \sum_{n=1}^{N_T} \|\psi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

であり, c は $\nu, h, \Delta t$ に依らない正定数である. P1, P2 要素を用いる場合には, スキーム 0 と同じ精度である.

4 おわりに

本稿では特性曲線有限要素法のアイデアと, 従来のスキーム, 数値積分を伴わないスキームを紹介した. ここでは述べなかったが, 特性曲線有限要素法による近似は Oseen 方程式や Navier-Stokes 方程式に対しても適用可能である [5, 2, 3].

最後に関連する文献について述べる. 有限要素法の数学的理論については [7, 8, 9, 10] を, そのプログラムの方法については [11, 12] などを参照していただきたい. ソフトウェア FreeFem++ (<http://www.freefem.org/ff++/>) には, 数値積分を用いる特性曲線有限要素法を含む, 有限要素計算を容易に実装するための機能がある. これに関する日本語の文献として [13] がある.

謝辞 日ごろからご指導いただいている田端正久先生に感謝する.

城崎新人セミナーの場を設けてくださった運営委員の皆様, そのご支援をいただいている先生方にお礼申し上げます. また, 質問や議論をしていただいた方々にも感謝したい.

参考文献

- [1] J. Douglas, Jr. and T. Russell. Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 19, No. 5, pp. 871–885, 1982.
- [2] O. Pironneau. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik*, Vol. 38, pp. 309–332, 1982.
- [3] Endre Süli. Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik*, Vol. 53, No. 4, pp. 459–483, 1988.
- [4] Masahisa Tabata. Discrepancy between theory and real computation on the stability of some finite element schemes. *Journal of computational and applied mathematics*, Vol. 199, No. 2, pp. 424–431, 2007.
- [5] Hirofumi Notsu and Masahisa Tabata. Error estimates of a pressure-stabilized characteristics finite element scheme for the Oseen equations. *Journal of Scientific Computing*, 2015. <http://dx.doi.org/10.1007/s10915-015-9992-8>.
- [6] 田中克徳, 鈴木厚, 田端正久. 厳密な積分を用いる特性有限要素法. 九州大学情報基盤センター年報, Vol. 2, pp. 11–18, 2002.
- [7] 田端正久. 偏微分方程式の数値解析. 岩波書店, 2010.
- [8] 菊地文雄. 有限要素法の数理. 培風館, 1994.
- [9] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [10] Susanne Brenner and Ridgway Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, 3rd edition, 2008.
- [11] 田端正久, 中尾充宏. 偏微分方程式から数値シミュレーションへ/計算の信頼性評価. 講談社, 2008.
- [12] 菊地文雄. 有限要素法概説. サイエンス社, 新訂版, 1999.
- [13] 大塚厚二, 高石武史. 有限要素法で学ぶ現象と数理. 共立出版, 2014.