Ehrhart 多項式の係数における best possible な下限

土谷　昭善 *

大阪大学大学院　情報科学研究科，2015 年 2 月

この度は第 12 回城崎新人セミナーに参加させていただき、そして講演の機会をいただきましたことを深く感謝申し上げます。

1　導入

空間 $\mathbb{R}^d$ の点 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$ は $\alpha_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq d$ のとき整数点と呼ばれる。凸多面体が整であるとはその任意の頂点が整数点であるときにいう。$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体とする。任意の正整数 n について、

$$n\mathcal{P} := \{n\boldsymbol{\alpha} | \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}\}$$

と置く。$n\mathcal{P}$ に含まれる整数点の個数を $i(\mathcal{P}, n)$ と表す。つまり

$$i(\mathcal{P}, n) := |n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d|$$

である。

この時、次のようなことが知られている。

- $i(\mathcal{P}, n)$ は、n に関する d 次多項式であり、定数項は常に 1 である。

- $i(\mathcal{P}, n)$ の n^d における係数は $\mathrm{vol}(\mathcal{P})$、$n^{d-1}$ における係数は $\frac{\mathrm{vol}(\partial\mathcal{P})}{2}$ と一致する。

この多項式 $i(\mathcal{P}, n)$ を $\mathcal{P}$ の **Ehrhart 多項式**と呼ぶ。

例 1. 空間 $\mathbb{R}^3$ の点

$$(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)$$

を頂点とする立方体 $\mathcal{P}$ の Ehrhart 多項式は

$$\begin{aligned} i(\mathcal{P}, n) &= (n+1)^3 \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

である。

Ehrhart 多項式については [1] に詳しく書かれている。

*a-tsuchiya@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

2　Ehrhart 多項式の係数における下限

整数 i と変数 z に対して定義された多項式

$$c_i(z) = (z+i)(z+i-1)\cdots(z+i-(d-1)) = d!\binom{z+i}{d}$$

の r 次の係数を $C^d_{r,i}$ で表す。さらに $d \geq 3$ に対して、

$$M_{r,d} = \min\{C^d_{r,i} : 1 \leq i \leq d-2\}$$

とする。

Ehrhart 多項式 $i(\mathcal{P}, n)$ の r 次の係数を $g_r(\mathcal{P})$ とする。$r = 1, \ldots, d-1$ に対して、$g_r(\mathcal{P})$ の下限が $\mathcal{P}$ の体積 $\mathrm{vol}(\mathcal{P})$ を用いて与えられた ([2])。

定理 2 (M. Henk and M.Tagami, 2009)**.** $d \geq 3$ とし、$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体とする。このとき $r = 1, \ldots, d-1$ に対して、

$$g_r(\mathcal{P}) \geq \frac{1}{d!}\left((-1)^{d-r}\mathrm{stirl}(d+1, r+1) + (d!\mathrm{vol}(\mathcal{P}) - 1)M_{r,d}\right)$$

となる。ここで、$\mathrm{stirl}(d,i)$ は $\prod_{i=0}^{d-1}(z-i) = \sum_{i=1}^{d} \mathrm{stirl}(d,i)\, z^i$ で定義される、第一種スターリング数である。

この下限についてさらに次のことが知られている。

- $r \in \{1, 2, d-2\}$ のとき、任意の体積において best possible である。
- $r = d-1$ のとき、任意の体積おいて best possible とは限らない。ただし他によい下限が与えられている。

他の次数においては何も知られていない。そこで次の問題を考えた。

問題 3. $r = 3, \ldots, d-3$ において定理 *2* の下限は best possible か。そうでなければ best possible な下限が与えられるか。

この問題に対する部分的解決が、本原稿の主定理である。

3　主定理

$d \geq 3$ に対して、

$$N_{r,d} = \min\{C^d_{r,i} : \lceil (d-1)/2 \rceil \leq i \leq d-2\}$$

とする。このとき $N_{r,d} \geq M_{r,d}$ である。

次の定理が本原稿の主定理である ([3])。

定理 4. $d \geq 3$ とし $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体とする。$r \in \{1, 2, 3, d-3, d-2\}$ または $d-r$ が偶数であるとする。このとき

$$g_r(\mathcal{P}) \geq \frac{1}{d!}\left((-1)^{d-r}\mathrm{stirl}(d+1, r+1) + (d!\mathrm{vol}(\mathcal{P}) - 1)N_{r,d}\right)$$

となる。特に、この下限は任意の体積において best possible である。

$d \geq 7, r = d-3$ のとき、$M_{r,d} < N_{r,d}$ である。よってこのとき、この下限は定理 2 の下限より真に大きくなる。

下限が best possibe であるということは、その下限となる整凸多面体が存在する。実際にどのような整凸多面体が下限になるのか例をあげておく。

例 5. $d = 7, r = d-3 = 4$ とする。このとき

$$N_{4,7} = C^d_{4,4} = -35$$

$$M_{4,7} = C^d_{4,1} = -140$$

となり、$N_{4,7} > M_{4,7}$ である。また $\mathrm{stirl}(8,5) = -1960$ であるので定理 4 で与えられている下限は

$$g_4(\mathcal{P}) \geq \frac{1}{7!}\left(1960 - 35(7!\mathrm{vol}(\mathcal{P}) - 1)\right)$$

となる。

実際にこの下限を与える整凸多面体は以下の通りである。$e_1, \ldots, e_7$ を $\mathbb{R}^7$ の標準基底とする。2 以上の任意の正の整数 v に対して 8 個の整数点を以下で定義する。

$$v_i = \begin{cases} (0,\ldots,0) & i = 0, \\ e_i & i = 1,\ldots,6 \\ (0,1,1,1,v-1,v-1,v) & i = 7 \end{cases}$$

これらを用いて単体

$$\mathcal{P} = \mathrm{conv}(\{v_0, \ldots, v_7\})$$

を定義する。このとき $d!\mathrm{vol}(\mathcal{P}) = v$ であり、

$$g_4(\mathcal{P}) = \frac{1}{7!}\left(1960 - 35(v-1)\right)$$

となる。実際 $v = 100$ の時の Ehrhart 多項式は

$$i(\mathcal{P}, n) = \frac{5}{252}n^7 + \frac{103}{720}n^6 + \frac{29}{144}n^5 - \frac{43}{144}n^4 + \frac{35}{144}n^3 + \frac{142}{45}n^2 + \frac{99}{28}n + 1$$

となる。

4 Ehrhart 多項式の係数における best possible な下限の予想

定理 4 により、次の予想が自然に考えられる。

予想 6. $d \geq 3$ とし $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体とする。このとき $r = 1, \ldots, d-2$ に対して、

$$g_r(\mathcal{P}) \geq \frac{1}{d!}\left((-1)^{d-r}\mathrm{stirl}(d+1, r+1) + (d!\mathrm{vol}(\mathcal{P}) - 1)N_{r,d}\right)$$

となる。特に、この下限は任意の体積において best possible である。

$C_{r,d} = (C^d_{r,\lceil \frac{d-1}{2} \rceil}, \ldots, C^d_{r,d-1})$ とする。予想 6 を証明するためには、次の命題が重要となってくるであろう。

命題 7. $d \geq 3$ とし $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体とする。$d-r$ が奇数であり、$C_{r,d}$ が次の条件を満たしていると仮定する。
条件「ある正の整数 $t \in \{i \in \mathbb{Z} : \lceil \frac{d-1}{2} \rceil + 1 \leq t \leq d-1\}$ で $t \leq i \leq d-1 \Rightarrow C^d_{r,i} \geq C^d_{r,i-1}$ かつ $N_{r,d} = \min\{C^d_{r,i} : \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor \leq i \leq t-1\} = \min\{-|C^d_{r,i}| : \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor \leq i \leq t-1\}$ を満たすものが存在する。」

このとき

$$g_r(\mathcal{P}) \geq \frac{1}{d!}\left((-1)^{d-r}\mathrm{stirl}(d+1, r+1) + (d!\mathrm{vol}(\mathcal{P}) - 1)N_{r,d}\right)$$

となる。特に、この下限は任意の体積において best possible である。

一般的に、任意の次元 d 及び次数 r において $C_{r,d}$ の性質を調べることは難しい。しかし、低次元においては実際に $C_{r,d}$ を計算することで、それが命題 7 の条件を満たすかどうかを判定することができる。

最後に現在までの計算実験の結果を系として紹介する。

系 8. $3 \leq d \leq 1000$ ならば $C_{r,d}$ は命題 *7* の条件を満たす。特にこのとき、予想 *6* は正しい。

参考文献

[1] M. Beck and S. Robins, Computing the continuous discretely, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2007

[2] M. Henk and M. Tagami, Lower bounds on the coefficients of Ehrhart polynomials, *Europ. J. Combinatorics*, **30**(2009), 70–83.

[3] A. Tsuchiya, Best possible lower bounds on the coefficients of Ehrhart polynomials, arXiv:1501.02138v2.