非線形固有値問題に関連した (p,q)-ラプラス方程式の正値解の存在と非存在について

田中　視英子 *

東京理科大学理学部第一部数学科，2015 年 2 月

1　序

本講演では (p,q)-Laplacian の固有値問題に付随した (正値) 解の存在と非存在について最近得られた結果について紹介する．具体的には, 以下のような (p,q)-Laplace 方程式を考える:

$$(GEV;\alpha,\beta) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \alpha|u|^{p-2}u + \beta|u|^{q-2}u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで, $\Delta_r u := \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{r-2}\nabla u\right)$, $1<q<p<\infty$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, Ω は $\mathbb{R}^N$ 内の有界領域で, 境界 $\partial\Omega$ は C^2 級とする．

定義 1. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ が $(GEV;\alpha,\beta)$ の解であるとは, 任意の $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi\, dx + \int_\Omega |\nabla u|^{q-2}\nabla u\nabla\varphi\, dx = \int_\Omega (\alpha|u|^{p-2}u + \beta|u|^{q-2}u)\,\varphi\, dx$$

が成り立つこととする．

まず, $-\Delta_r$ $(1<r<\infty)$ の第一固有値について簡単に紹介する．方程式

$$(WEV;r,\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta_r u = \lambda m_r(x)|u|^{r-2}u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

が非自明解 u (固有関数) をもつとき, $\lambda \in \mathbb{R}$ は $-\Delta_r$ の重み m_r 付きの固有値であるという．また重みが付かないとき $(m_r \equiv 1)$, すなわち, 方程式

$$(EV;r,\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta_r u = \lambda|u|^{r-2}u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

が非自明解 u (固有関数) をもつとき, $\lambda \in \mathbb{R}$ は $-\Delta_r$ の固有値であると呼ばれる．

ここで $A_r(t) := |t|^{r-2}$ とおくと, $(EV;r,\lambda)$ は

$$-\operatorname{div}\,(\,A_r(|\nabla u|)\nabla u) = \lambda A_r(u)u \qquad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

*tanaka@ma.kagu.tus.ac.jp

と書き換えることができる. さらに $A_{p,q}(t) := A_p(t) + A_q(t) = |t|^{p-2} + |t|^{q-2}$ とおくと, $\lambda = \alpha = \beta$ という特別の場合に方程式 $(GEV; \lambda, \lambda)$ は

$$-\mathrm{div}\,(A_{p,q}(|\nabla u|)\nabla u) = \lambda A_{p,q}(u)u \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

と書き換えることができ, 通常の固有値問題に現れる方程式と同じ形式を持つことがわかる. この意味で $(GEV; \alpha, \alpha)$ の非自明解を探すことは $-\Delta_p - \Delta_q$ の一般化された固有値を求めることと考えられる. また, 通常の $-\Delta_r$ の固有値は第一固有値 (最小の固有値) 以外には符号一定の固有関数を持たないことが知られている. この意味で $(GEV; \alpha, \alpha)$ の正値解を調べることは $-\Delta_p - \Delta_q$ の第一固有値のようなものを考察することに対応していると思われる.

最近, (p, q)-Laplace 方程式についての研究が活発に行われているが, 固有値問題に関する結果は少ない. Motreanu 氏との共同研究 ([3]) において以下の方程式の正値解の存在と非存在について扱った:

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda(m_p(x)|u|^{p-2}u + m_q(x)|u|^{q-2}u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここで $m_p, m_q \in L^\infty(\Omega)$ は $\{x \in \Omega :\ m_r(x) > 0\}$ $(r = p, q)$ のルベーグ測度がゼロでない重みである. $m_p \equiv 0$ または $m_q \equiv 0$ の場合には [4] や [5] にて符号変化解についても考察されている. さらに, [2] では一次元で重み無しの場合に対して p, q と区間の長さ (の半分) L に応じて以下の方程式について, 少なくとも 5 種類の正値解の分岐図が現れることを示した:

$$\begin{cases} (|u'|^{p-2}u')' + (|u'|^{q-2}u')' + \lambda(|u|^{p-2}u + |u|^{q-2}u) = 0 \quad \text{in } (-L, L), \\ u(-L) = u(L) = 0. \end{cases}$$

2　レイリー商

よく知られているように, $-\Delta_r$ $(1 < r < \infty)$ の第一固有値 $\lambda_1(r, m_r)$ (重み m_r 付き), $\lambda_1(r)$ (重みなし) は以下のレイリー商の下限 (最小値) として得られる.

$$\lambda_1(r, m_r) := \inf\left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^r\,dx}{\int_\Omega m_r|u|^r\,dx}\,;\, u \in W_0^{1,r}(\Omega),\ \int_\Omega m_r|u|^r\,dx > 0 \right\},$$

$$\lambda_1(r) := \inf\left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^r\,dx}{\int_\Omega |u|^r\,dx}\,;\, u \in W_0^{1,r}(\Omega) \setminus \{0\} \right\}. \tag{2}$$

また, 上の下限は正値解 $\varphi_r(m_r) \in C_0^1(\overline{\Omega})$ (重み付き), $\varphi_r \in C_0^1(\overline{\Omega})$ (重みなし) によって達成され, 定数倍を除いては一意的である (すなわち, 第一固有値は単純である).

一方, $-\Delta_p - \Delta_q$ のレイリー商の最小化については以下のような結果が得られている.

命題 2 ([3])**.**

$$\Phi(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla u|^q\,dx, \quad \Psi(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega m_p|u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega m_q|u|^q\,dx$$

に対して

$$\underline{\lambda} := \inf\left\{ \frac{\Phi(u)}{\Psi(u)}\,;\, u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \Psi(u) > 0 \right\} \tag{3}$$

とおく. このとき,

$$\underline{\lambda} = \min\{\lambda_1(p, m_p), \lambda_1(q, m_q)\}$$

が成り立つ. さらに以下の (i) または (ii) が成り立つならば, (3) の下限は達成されない:
(i) $\lambda_1(p, m_p) \neq \lambda_1(q, m_q)$; (ii) $\varphi_p(m_p) \neq t\varphi_q(m_q)$ *for all* $t > 0$.

注意 3. 上の (i) と (ii) が共に成り立たない場合, すなわち

$$\lambda_1(p, m_p) = \lambda_1(q, m_q) \quad \text{かつ} \quad \exists t > 0 : \varphi_p(m_p) = t\varphi_q(m_q)$$

が成り立つことと, (3) の下限が達成されることは同値であることが分かる.

注意 4. 一次元 *($N = 1$)* で重みなしの第一固有関数 φ_p, φ_q については *[2]* で $p \neq q$ ならば φ_p と φ_q は一次独立であることが示されている. 一方, 一次元の場合でも重みが付いた場合を考えると第一固有関数 $\varphi_p(m_p)$ と $\varphi_q(m_q)$ が一次従属になるような場合がある *([1]* を参照*)*.

3 主結果

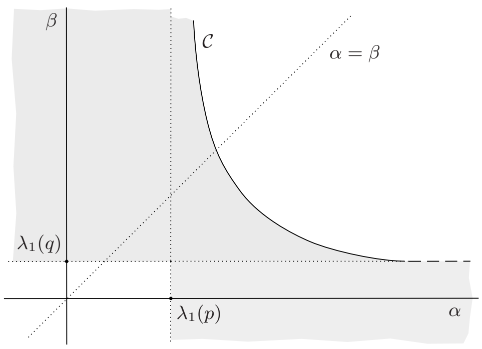
主結果を述べるために, 場合分けをする:

(i) $\lambda_1(p)$ と $\lambda_1(q)$ は異なる固有空間を持つ, すなわち **(LI)** $\forall k \neq 0 : \varphi_p \neq k\varphi_q$;

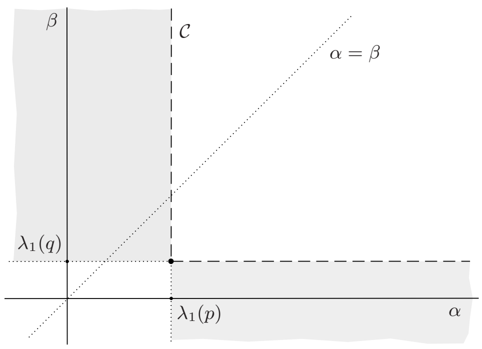
(ii) $\lambda_1(p)$ と $\lambda_1(q)$ は同じ固有空間を持つ, すなわち **(LD)** $\exists k \in \mathbb{R} : \varphi_p = k\varphi_q$.

ここでは, 主結果を簡単に述べるだけにする (詳しくは [1] を参照).

主結果 連続な曲線 $\mathcal{C}$ が存在して, 斜線部に (α, β) が存在すれば $(GEV; \alpha, \beta)$ は正値解を持つが, それ以外の場合には正値解を持たない.



Case **(LI)**



Case **(LD)**

4 曲線 $\mathcal{C}$ の構成

曲線の構成は簡単に述べると, 傾き 1 の直線を固定することにより 1 パラメータ化し, 最後に直線を動かすことにより行われる. そこで, 傾き 1, α 切片が s の直線上で方程式 $(GEV; \lambda + s, \lambda)$ が正値解を持つような高さ λ の上限を $\lambda^*(s)$ とする. すなわち,

$$\lambda^*(s) := \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : (GEV; \lambda + s, \lambda) \text{ が正値解を持つ }\} \quad \text{for } s \in \mathbb{R}$$

と定義し，この $\lambda^*(s)$ を用いて曲線 $\mathcal{C}$ を以下のように定義する:

$$\mathcal{C} := \{(\lambda^*(s)+s, \lambda^*(s))\,;\, s \in \mathbb{R}\}.$$

曲線 $\mathcal{C}$ の特徴付けを行うために，

$$s^* := \lambda_1(p) - \lambda_1(q) \quad \text{and} \quad s_+^* := \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi_q|^p\,dx}{\int_\Omega |\varphi_q|^p\,dx} - \lambda_1(q)$$

と定義する．ここで，s^* は点 $(\lambda_1(p), \lambda_1(q))$ を通る直線の α 切片を表していることに注意する．また $s^* \le s_+^*$ が常に成立して

$$s^* = s_+^* \Longleftrightarrow \textbf{(LD)} \text{ is satisfied}$$

という関係にあることもわかる ((2) と第一固有値の単純性).

命題 5 ([1])**.** $\lambda^*(s)$ は以下の性質を満たす*:*

(i) $\lambda^*(s) < +\infty$ for all $s \in \mathbb{R}$*;*

(ii) $\lambda^*(s) + s \ge \lambda_1(p)$ and $\lambda^*(s) \ge \lambda_1(q)$ for all $s \in \mathbb{R}$*;*

(iii) $\lambda^*(s) = \lambda_1(q)$ for all $s \ge s_+^*$*;*

(iv) $\lambda^*(s^*) + s^* > \lambda_1(p)$ and $\lambda^*(s^*) > \lambda_1(q) \Longleftrightarrow$ **(LI)** is satisfied*;*

(v) $\lambda^*(s)$ is continuous on $\mathbb{R}$*;*

(vi) $\lambda^*(s)$ is non-increasing and $\lambda^*(s) + s$ is non-decreasing on $\mathbb{R}$.

注意 6. (iii) と (vi) により，曲線 $\mathcal{C}$ *(*の右側*)* は少なくとも $s = s_+^*$ からは直線 $\beta = \lambda_1(q)$ と一致していることがわかる．一方，上の命題からは 曲線 $\mathcal{C}$ *(*の左側*)* は直線 $\alpha = \lambda_1(p)$ とどこかで触れているかいないか分かっていないが，一次元のときの *[2]* の結果から，直線 $\alpha = \lambda_1(p)$ と左側も触れている場合があることがわかる．

5 主結果の証明について

証明のポイントは

- 第一固有値の基本性質を使う
- 対応する汎関数の minimizer の存在を示す ($\alpha < \lambda_1(p)$, $\beta > \lambda_1(q)$ のとき)
- 対応する汎関数に峠の補題を適用する ($\alpha > \lambda_1(p)$, $\beta < \lambda_1(q)$ のとき)
- $-\Delta_p - \Delta_q$ に対する (generalized) Picone's type 不等式を作る
- **(LI)** の場合に $\lambda^*(s^*)$ が well-defined であることを示すために汎関数を Nehari 多様体に制限したものの minimizer の存在を示す (α 切片 が s^* のときには, global minimizer の存在や mountain pass value の存在を示す方法ではうまくいかないため)

ことなどにより行われるが, 一番のポイントは super-, sub-solution method を用いて示される次の補題である.

補題 7. *$\beta > \lambda_1(q)$ とし, $w \in C_0^1(\overline{\Omega})$ は $\partial w/\partial\nu < 0$ on $\partial\Omega$ (ν は外向き法線ベクトル) を満たし,*

$$-\Delta_p w - \Delta_q w \geq \alpha|w|^{p-2}w + \beta|w|^{q-2}w \quad \text{in } \Omega \qquad (\text{超関数の意味で})$$

が成り立つとする. このとき, $(GEV;\alpha,\beta)$ は正値解をもつ.

この補題 7 と $\lambda^*(s)$ の定義により, 各直線上で高さ λ が $\lambda_1(q) < \lambda < \lambda^*(s)$ である場合には, 方程式 $(GEV;\lambda+s,\lambda)$ は正値解を持つことがわかる. また, $\lambda^*(s)+s$ や $\lambda^*(s)$ の単調性についての証明もこの補題 7 を使えば簡単に示すことができる.

注意 8. *補題 7 は符号変化しない重みが付いた場合にも同様の結果が得られるので, [1] の結果は*

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \alpha m_p |u|^{p-2}u + \beta m_q |u|^{q-2}u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

で符号変化しない重み m_p, $m_q \geq 0$ の場合にも拡張できることがわかる.

参考文献

[1] Bobkov, V., and Tanaka, M. On positive solutions for (p,q)-Laplace equations with two parameters. *to appear in Calc. Var. PDE.*

[2] Kajikiya, R., Tanaka, M., and Tanaka, S. Bifurcation of positive solutions for the one dimensional (p,q)-Laplace equation. *submitted*.

[3] Motreanu, D., and Tanaka, M. On a positive solution for (p,q)-Laplace equation with indefinite weight. *To appear in Minimax Theory and its Applications*.

[4] Tanaka, M. Generalized eigenvalue problems for (p,q)-Laplacian with indefinite weight. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 419*, 2 (2014), 1181 – 1192.

[5] Tanaka, M. Uniqueness of a positive solution and existence of a sign-changing solution for (p,q)-Laplace equation. *J. Nonlinear Funct. Anal. 2014* (2014), 1–15.