主対角和モデルに関するトーリック環の性質について

武田 裕康 *

北海道大学大学院理学院数学専攻博士課程，2015 年 2 月

1 導入

$n \times n$ 自然数行列 $M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ から行和、列和、主対角成分の和からなる $2n+1$-次元自然数ベクトルをとる写像

$$\pi_{diag} : M_n(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}^{2n+1} \quad M \mapsto (r_1(M), \ldots, r_n(M), c_1(M), \ldots, c_n(M), d(M))$$

を考える。ただし、

$$\begin{aligned} r_i(M) &= m_{i1} + \cdots + m_{in} \\ c_j(M) &= m_{1j} + \cdots + m_{nj} \\ d(M) &= m_{11} + \cdots + m_{nn} \end{aligned}$$

である。この写像の像 $\mathrm{Im}(\pi_{diag})$ は (i,j)-行列単位 E_{ij} の像 $\mathbf{e}_{i,j} = \pi_{diag}(E_{ij})$ から生成される半群である。つまり、$\mathcal{A}_n = \{\mathbf{e}_{i,j} \mid 1 \le i,j \le n\}$ とすると、$\mathrm{Im}(\pi_{diag}) = \mathbb{N}\mathcal{A}_n$ が成り立つ。(講演で話した『配置行列』$\mathcal{A}_n$ とは、列ベクトル $\mathbf{e}_{i,j}$ を $(1,1),\ (1,2), \ldots, (1,n),\ (2,1),\ \ldots,\ (n,n-1),\ (n,n)$ の順に並べたものである。) このように、自然数行列から行和、列和、主対角和をとることを『主対角和モデル』と呼ぶ。今回はこの主対角和モデルに関するトーリック環 $R_n := \mathbb{C}[\mathbb{N}\mathcal{A}_n]$ とその正規化との差について考察した。

一般に $L \subset \{(i,j) \mid i = 1, \cdots .m,\ j = 1, \cdots, n\}$ を $m \times n$ を自然数行列の成分の部分集合とする。上と同様に $m \times n$ 自然数行列の行和、列和、L に含まれる成分の和から半群 $\mathbb{N}A_L$ を定義し、$R_L = \mathbb{C}[\mathbb{N}A_L]$ を半群環、I_L を A_L から定まるトーリックイデアルとしたとき、次が成り立つ。

Theorem 1.1 (大杉-日比 (2009)[1]) 次は同値である。

(i) I_L は *quadratic* な二項式で生成される。

(ii) I_L は *squarefree* なイニシャルイデアルを持つ。

(iii) I_L は *quadratic* な *Gröbner* 基底を持つ。

(iv) R_L は *normal* である。

(v) R_L は *Koszul* である。

*tkd.i-0-u@math.sci.hokudai.ac.jp

(vi) L は 2×2 block diagonal であるか、triangular のいずれかである。

ただし、$L \subset \{(i,j) \mid i=1,\cdots .m,\ j=1,\cdots,n\}$ に対して、

- L が 2×2 ***block diagonal*** とは、ある自然数 r, c が存在して、

$$L=\{(i,j)\mid 1\le i\le r,\ 1\le j\le c\}\cup\{(i,j)\mid r+1\le i\le m,\ c+1\le j\le n\}$$

  となるときにいう。

- L が ***triangular*** とは、

$$(i,j)\in L \Leftarrow \text{任意の } 1\le i'\le i,\ 1\le j'\le j \text{ に対して } (i',j')\in L$$

  を満たすときにいう。

定理 1.1 で (iv) と (vi) が同値になるのが今回のポイントである。以上から主対角和モデルのときにはトーリック環が正規でないということがわかる。

2 準備

上の問題を考察する際、「半群環における正規化との差」と「半群における正規化との差」は一対一に対応する。そして、半群環より半群における正規化との差を計算する方が簡単である。よって、半群での正規化との差について計算する。ここではそのために必要な道具を定義する。

d, n を正の整数、$A := \{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n\}\subset\mathbb{Z}^d$ とする。$S := \mathbb{N}A$ を A から生成される半群、$C := \mathbb{R}_{\le 0}A$ を A から生成される cone とする。

半群 S の正規化を $\tilde{S} := C\cap\mathbb{Z}A$ と定義する。これは、「cone C 内の A によって生成される格子点全体」のことである。$S=\tilde{S}$ を満たす時、半群 S は正規であるという。(S が正規であることと半群環 $\mathbb{C}[S]$ が正規であるということは同値である。)S が正規でないとき、$Holes(\tilde{S}) := \tilde{S}\backslash S$ を ($\tilde{S}$ の)**Holes** という。

$Holes(\tilde{S})$ について考える際、まず次の Hilbert Basis という集合を求める。

Definition 2.1 半群 S が正規でない時、次を満たす $\{\mathbf{0}\}\neq\mathcal{H}\subset\tilde{S}$ が存在する。

$$\tilde{S}=\cup_{h\in\mathcal{H}}(h+S)$$

これを満たす $\mathcal{H}$ のうち、包含関係に関して極小となるものを *($\tilde{S}$ の)**Hilbert Basis*** と呼ぶ。

この Hilbert Basis を計算するときに、C の facet を求めると便利である。

Definition 2.2 *τ を C の facet(余次元 1 の面) とするとき、次の条件*

(1) $f_\tau(C)\ge 0$

(2) $f_\tau(\tau)=0$

(3) $f_\tau(\mathbb{Z}A)=\mathbb{Z}$

を満たす線形形式 f_τ を τ の ***primitive integral support function*** という。

この primitive integral support function は任意の facet に対して一意に定まる。

Example 2.3

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とおく。このとき、$\mathbb{R}_{\geq 0}A$ の *facet* は

$$\{\tau_1 = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_1,\ \tau_3 = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_3\}$$

であり、各 *facet* に対応する *primitive integral support function* は $s = (s_1, s_2)$ として

$$f_{\tau_1}(s) = s_2,\ f_{\tau_3}(s) = 3s_1 - s_2$$

である。また、$(\mathbb{R}_{\geq 0}A \cap \mathbb{Z}A) \setminus \mathbb{N}A = \{(n,1)\ |n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1\}$ となるので、$\mathbb{R}_{\geq 0}A$ の *Hilbert Basis* は $\mathcal{H} = \{\mathbf{0},\ (1,1)\}$ である。

3　主結果

以下では、講演内で話すことのできなかった証明に至る流れを含めて書く。以下、$n \geq 3,\ S_n := \mathbb{N}\mathcal{A}_n,\ C_n = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathcal{A}_n,\ \tilde{S}_n := C_n \cap \mathbb{Z}S_n$ とする。

3.1　facet の計算

まず $n = 2$ のときは容易に計算できて、C_n の primitive integral support function は次のようになる。

$$\mathcal{F}_2 := \{r_1 - c_2 + d, r_2 - c_1 + d, r_1 + c_2 - d, r_2 + c_1 - d\}$$

この結果から、次の集合が C_n の primitive integral support function であると推測した。

$$\mathcal{F}_n = \left\{ r_k, c_k, d, \sum_{i \in I} r_i + \sum_{i \notin I} c_i - d, \sum_{i \neq k} r_i - c_k + d \;\middle|\; \begin{array}{l} I \subsetneq \{1, \ldots, n\},\ I \neq \emptyset, \\ k = 1, \ldots, n \end{array} \right\}$$

これは以下のとおり正しい。

Theorem 3.1 $f \in \mathcal{F}_n \ \Leftrightarrow\ f$ は C_n の *primitive integral support function.*

証明の際、次の補題が重要な役割をする。

Lemma 3.2 $\mathcal{F}_n^{ij} := \{f \in \mathcal{F}_n | f(\mathbf{e}_{i,j}) > 0\}$ とおき、$\mathbf{e} \in C_n$ に対して $\alpha_{i,j}(\mathbf{e}) := \min\left\{\frac{f(\mathbf{e})}{f(\mathbf{e}_{i,j})} | f \in \mathcal{F}_n^{ij}\right\}$ とおく。

このとき、

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_{n,n}(\mathbf{e}) = 0 & \\ \alpha_{n,i}(\mathbf{e}) = 0 & (i = 1, \ldots, n-1) \\ \alpha_{i,n}(\mathbf{e}) = 0 & (i = 1, \ldots, n-1) \end{array} \right. \Leftrightarrow r_n(\mathbf{e}) = c_n(\mathbf{e}) = 0$$

が成り立つ。

証明のアウトラインは次のとおりである：$n \times n$ 正方行列から第 n 行、第 n 列を取り除く操作をしたとき、その前後で S の形が主対角成分で保たれることを用いて、帰納法によって示す。$\forall f \in \mathcal{F}_n,\ f(\mathbf{e}_0) \geq 0$ を満たす $\mathbf{e}_0 \in \mathbb{R}^{2n+1}$ に対して、$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_0 - \alpha_{n,n}(\mathbf{e}_0),\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 - \alpha_{n,n-1}(\mathbf{e}_1), \cdots$ と帰納的に定めると、$\mathbf{e}_n$ は $\alpha_{n,i}(\mathbf{e}_n) = 0\ (i = 1, \ldots, n)$ を満たす。よって、補題から $r_n(\mathbf{e}_n) = 0$ となる。さらに、$\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e}_n - \alpha_{n-1,n}(\mathbf{e}_n), \mathbf{e}_{n+2} = \mathbf{e}_{n+1} - \alpha_{n,n-2}(\mathbf{e}_{n+1}), \cdots$ と帰納的に定めると、$\mathbf{e}_{2n+1}$ は $\alpha_{i,n}(\mathbf{e}_{2n+1}) = \alpha_{n,i}(\mathbf{e}_{2n+1}) = 0\ (i = 1, \ldots, n)$ を満たす。よって、補題から $r_n(\mathbf{e}_{2n+1}) = c_n(\mathbf{e}_{2n+1}) = 0$ となる。このことから $\mathbf{e}_{2n+1}$ を $\mathbb{R}^{2n-1}$ の元とみなせる。さらに、$\forall f \in \mathcal{F}_{n-1},\ f(\mathbf{e}_{2n+1}) \geq 0$ を満たすことも示せる。以上から、$n = 2$ のときに帰着される。

3.2 Hilbert Basis の計算

次に Hilbert Basis の計算をする。$\mathcal{H}_n$ の定義から、

$$\mathcal{H}_n = \left\{ \mathbf{e} \in \mathbb{Z}S_n \;\middle|\; \begin{array}{l} f(\mathbf{e}) \geq 0\ (\forall f \in \mathcal{F}_n), \\ \forall i, j,\ \exists f \in \mathcal{F}_n,\ \text{s.t. } f(\mathbf{e} - \mathbf{e}_{i,j}) < 0 \end{array} \right\}$$

となる。

Theorem 3.3 $n \geq 3$ のとき、$\mathbf{a}_{i,j} \in \tilde{S}_n\ (i < j)$ を

$$\begin{cases} r_k(\mathbf{a}_{i,j}) = c_k(\mathbf{a}_{i,j}) = 1 & (k = i, j) \\ r_k(\mathbf{a}_{i,j}) = c_k(\mathbf{a}_{i,j}) = 0 & (k \neq i, j) \\ d(\mathbf{a}_{i,j}) = 1 & \end{cases}$$

として定める。このとき、

$$\mathcal{H}_n = \{\mathbf{a}_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

である。

$\mathbf{a}_{i,j} \in \mathcal{H}_n$ は直接計算して示す。これ以外に Hilbert Basis がないことを示すときには $\mathbf{a}_{i,j}$ 各 facet 上、及び C_n の内部に $\forall i, j,\ \exists f \in \mathcal{F}_n,\ \text{s.t. } f(\mathbf{e} - \mathbf{e}_{i,j}) < 0$ を満たす点が存在しないことを計算して示した。

3.3 Holes の計算

最後に Holes を計算する。$\mathbf{e}_{i,j},\ \mathbf{a}_{i,j}$ について

$$2\mathbf{a}_{i,j} \in S_n,\ \mathbf{a}_{i,j} + \mathbf{e}_{i',j'} \in S_n\ (i' \neq j',\ (i', j') \neq (i, j),\ (j, i))$$

が成り立つ。このことから、Holes は

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_{i,i} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_{j,j} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_{i,j} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_{j,i}, \\ F_{diag} &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_{k,k} \end{aligned}$$

とするとき、$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\mathbf{a}_{ij} + (F_{ij} \cap \mathbb{Z}\mathcal{A}_n)) + (\mathbf{a}_{ij} + (F_{diag} \cap \mathbb{Z}\mathcal{A}_n))$ に含まれることがわかる。さらに、次が示せる。

Theorem 3.4

$$Holes(\tilde{S}_n) = \sum_{1 \le i < j \le n} (\mathbf{a}_{ij} + (F_{ij} \cap \mathbb{Z}\mathcal{A}_n)) + (\mathbf{a}_{ij} + (F_{diag} \cap \mathbb{Z}\mathcal{A}_n))$$

が成り立つ。

4 concluding remarks

講演内でも話したが、facet の計算の証明法は「第 n 行、第 n 列を取り除く操作をした際、形が保たれる」$L \subset \{(i,j) \mid i = 1, \cdots .m,\ j = 1, \cdots, n\}$ に対しても同様に使えることが予測される。特に補題 3.2 は証明の鍵になるだけでなく、さらに一般の L でも似たような形で成り立つのではないか…というのが私の予想である。また、Hilbert Basis の計算方法も同じように拡張ができそうだと考えられる。

紙面の都合で書くことができなかったが、今回の結果の応用として facet や Hilbert Basis を用いて超幾何多項式

$$\Phi_{\mathcal{A}_n,\beta}(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{N}^n, \mathcal{A}_n \mathbf{u} = \beta} \frac{1}{\mathbf{u}!} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$$

(ただし $\mathbf{u}! = u_1! \cdots u_d!$) の生成微分作用素を計算したり、Holes を用いて R_n の局所コホモロジーについて調べることができる。前者については [2] に詳しく書かれているので、こちらを読むとよい。

5 謝辞

この度は第 12 回城崎新人セミナーに参加させていただきありがとうございました。この城崎で同年代の数学研究者と交流できたこと、また、自分の分野とは違った研究発表をお聞きできたことを大変嬉しく思います。また、私の講演について興味を持っていただき、質問・コメントをしてくださった方にもお礼申し上げます。最後に、今回発表の機会を与えてくださり、様々に支援をしてくださった運営委員の皆様にお礼申し上げます。

参考文献

[1] Ohsugi Hidefumi and Hibi Takayuki: Two way subtable sum problem and Quadradic Gröbner bases: Proceedings of the American Mathematical Society 137 (2009) no. 5, 1539–1542.

[2] Saito Mutsumi and W.N.Traves: Differential algebras on semigroup algebras in Symbolic Computation: Solving Equations in Algebra, Geometry, and Engineering (South Hadley, MA, 2000), Contemp. Math. 286, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, 207226