FHT 同型とその自然性

高田　土満 *

京都大学数学教室，2015 年 2 月

1　主定理の背景

本稿の内容は，筆者の論文 [高田] の内容の一部を，コンパクト Lie 群の Caran-Weyl 理論の無限次元版と見なし解説したものである．このセクションでは，論文全体の内容の概要と，その背景（FHT 同型）について述べる．

FHT 同型とは，[FHT2] で証明されている定理で，コンパクト Lie 群 G の Loop 群 LG の表現論と，G の G 同変ねじれ K 理論を結びつけた定理である．ねじれ K 理論（twisted K-theory）の詳しい定義などは [AS] 等に譲る．さて，彼らの定理の主張を，G がトーラスである場合に述べよう．

定理 1.1 ([FHT2]). T をトーラスとし，τ を許容的で正値な LT の中心拡大とする．このとき，次の同型が存在する．

$$FHT_T : R^\tau(LT) \to K_T^{\tau+dim(T)}(T)$$

$R^\tau(LT)$ は，LT のレベル τ の表現群と呼ばれるものである．詳しくは本文参照．

この定理の証明の概略を述べよう．

まず，別の群 $char(T,\tau)$ を用意し，次の二つの同型を記述する．

$$l.w._T : R^\tau(LT) \to char(T,\tau), M.d._T : K_T^{\tau+dim(T)}(T) \to char(T,\tau)$$

これらを記述することで，

$$FHT_T = (M.d._T)^{-1} \circ l.w._T$$

を示し，同型どうしの合成は同型であることから主張を得る．

同型の構成には，Loop 群上の「指数理論」を用いる美しく自然なものである．そこで次の問題を考える．

問題 1.2. $f : T' \to T$ を *Lie* 群の準同型とする．このとき，*Loop* 群の準同型 $Lf : LT' \to LT$ が自然に定義できる．そこで次の図式を考えることができ，可換になるか？

$$\begin{array}{ccc} R(LT) & \xrightarrow{(Lf)^*} & R(LT') \\ {\scriptstyle FHT_T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle FHT_{T'}} \\ K_T^{\tau+dim(T)}(T) & \xrightarrow{f^*} & K_{T'}^{f^*\tau+dim(T')}(T') \end{array}$$

この問題の答えは，No である．理由は二つあって，表現論側の問題としては，正エネルギー表現が無限次元であるため，表現を引き戻すと有限可約性がくずれることがあるという問題がある．K 理論側の問題としては，ねじれ K 理論は一般コホモロジー論であり，引き戻しが定義されてい

*d.takata@math.kyoto-u.ac.jp

るが，それは群の次数を変えないため，上で書いた f^* は，次元が等しくない限り定義されない．そこで次の問題に取り組むことにした．

問題 1.3. *Lie* 群の準同型 $f : T' \to T$ に対し，$f^\# : K_T^{\tau+dim(T)}(T) \to K_{T'}^{f^*\tau+dim(T')}(T')$ と $f^! : R^\tau(LT) \to R^{f^*\tau}(LT')$ を，以下の可換図式が成り立つように，それぞれ表現論，K 理論の言葉を使って定義せよ．

$$\begin{array}{ccc} R^\tau(LT) & \xrightarrow{f^!} & R^{f^*\tau}(LT') \\ {\scriptstyle FHT_T}\downarrow & & {\scriptstyle FHT_{T'}}\downarrow \\ K_T^{\tau+dim(T)}(T) & \xrightarrow{f^\#} & K_{T'}^{f^*\tau+dim(T')}(T') \end{array}$$

私はこの問題を，df が単射である場合に解決した．しかしそれは，次の二つの定理の系にすぎない．その二つの定理を述べる前に，一つ記号を用意しよう，補題の形で述べる．この補題は以下でも扱う．

補題 1.4. $f : T' \to T$ を *Lie* 群の準同型とすると，以下の準同型が定義できる．

$$char(f) : char(T,\tau) \to char(T', f^*\tau)$$

定理 1.5. 補題と同じ状況の時，$f^! : R^\tau(LT) \to R^{f^*\tau}(LT')$ と $f^\# : K_T^{\tau+dim(T)}(T) \to K_{T'}^{f^*\tau+dim(T')}(T')$ が定義でき，次の図式がともに可換になる．

$$\begin{array}{ccc} R^\tau(LT) & \xrightarrow{f^!} & R^{f^*\tau}(LT') \\ {\scriptstyle l.w._T}\downarrow & & {\scriptstyle l.w._{T'}}\downarrow \\ char(T,\tau) & \xrightarrow{char(f)} & char(T',f^*\tau) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} K_T^{\tau+dim(T)}(T) & \xrightarrow{f^\#} & K_{T'}^{f^*\tau+dim(T')}(T') \\ {\scriptstyle M.d._T}\downarrow & & {\scriptstyle M.d._{T'}}\downarrow \\ char(T,\tau) & \xrightarrow{char(f)} & char(T',f^*\tau) \end{array}$$

この二つの定理と Freed たちの証明から，上の主定理を導くのは，diagram chasing の演習問題である．

以下の内容は，上の定理 1.5 の表現論側の主張を，コンパクト Lie 群の Cartan-Weyl 理論のアナロジーとみなすことができるということを解説したものである．

2 Cartan-Weyl 理論

この節では，Cartan-Weyl 理論を大雑把に記述する．G を連結コンパクト Lie 群，$i : T \hookrightarrow G$ をその極大トーラスとする．T の次元を G の階数と呼ぶのであった．G の表現は T への制限で完全に決定することが知られている．G と T が与えられると，Weyl 群と呼ばれる有限群 $W(G)$ が定義され，T に作用する．T の表現が G の表現の制限から得られるとき，その表現は $W(G)$ の対称性がある．では逆に，T の表現であって $W(G)$ 不変なものが与えられたとき，G の表現の制限として実現されるか？　この自然な問いに答えるのが Cartan-Weyl 理論である．表現環の形で定理を述べよう．

定理 2.1. $i^* : R(G) \to R(T)$ の像は不変部分環 $R(T)^{W(G)}$ に一致する．

以下の可換図式を考えよう．$i : S \hookrightarrow H$ と $k : T \hookrightarrow G$ はそれぞれ極大トーラスである．表現環の関手性から，以下の可換図式が誘導される．

$$\begin{array}{ccc} R(G) & \xrightarrow{f^*} & R(H) \\ {\scriptstyle k^*}\downarrow & & {\scriptstyle i^*}\downarrow \\ R(T) & \xrightarrow{f|_S^*} & R(S) \end{array}$$

$f|_S^*$ は環準同型であることから，生成元の行先ですべての値が決まる．これは，$f|_S^*(X_j)$ を具体的に計算することで表示できる．

これを以下の議論との対応が分かりやすいように書き直しておこう．以下，表現環の環構造を忘れ，ただの $\mathbb{Z}$ 上の自由加群と思うことにする．このとき，それは既約表現の同値類の集合で生成される $\mathbb{Z}$ 上の自由加群である．つまり，

$$\Pi_T := \ker(\exp : \mathfrak{t} \to T), \Pi_S := \ker(\exp : \mathfrak{s} \to S)$$

$$\Lambda_T := \mathrm{Hom}(T, U(1)) \cong \mathrm{Hom}(\Pi_T, \mathbb{Z}), \Lambda_S := \mathrm{Hom}(S, U(1)) \cong \mathrm{Hom}(\Pi_S, \mathbb{Z})$$

とおくと，$R(T) \cong \mathbb{Z}[\Lambda_T], R(S) \cong \mathbb{Z}[\Lambda_S]$ という同型が成り立つ．ここで，$\mathbb{Z}[X]$ は，集合 X で生成される自由加群を表す．Λ_T，Λ_S に離散位相を入れることで，これらは標準的に，コンパクト台を持つ K 群 $K(\Lambda_T)$，$K(\Lambda_S)$ に同型である．この同一視のもと，表現のひき戻し $f|_S^* : R(T) \to R(S)$ は，1 次元表現のなす集合を $\Lambda_T = \mathrm{Hom}(\Pi_T, \mathbb{Z}) \subseteq \mathfrak{t}^*$，$\Lambda_S = \mathrm{Hom}(\Pi_S, \mathbb{Z}) \subseteq \mathfrak{s}^*$ とみなしたとき，

$${}^t d(f|_S) : \Lambda_T \subseteq \mathfrak{t}^* \to \mathfrak{s}^* \supseteq \Lambda_S$$

に対応する．表現環の間の写像 $f|_S^*$ とは，1 次元表現のなす集合の間の写像 $f|_S^* : \Lambda_T \to \Lambda_S$ を線形に拡張したものであるから，K 群間の写像では，push-forward 写像

$${}^t d(f|_S)_! : K(\Lambda_T) \to K(\Lambda_S)$$

に対応する．また，この書き換えによって，$R(G) \cong \mathbb{Z}[\Lambda_T/W(G)] \cong K(\Lambda_T/W(G))$ という同型が成り立ち，f^* も上の同型と可換図式を通じて，表現環のレベルでは ${}^t d(f|_S)_!$ によって計算できる．

3 正エネルギー表現の分類と主定理

3.1 正エネルギー表現の分類

下で定義する正エネルギー表現は自明でない限り射影的で（[PS]），LT 自身でなくそれを中心拡大した群の表現を考える必要があるが，ここでは射影表現の形で定義する．

定義 3.1 (正エネルギー表現). 連続準同型 $\rho : LT \rtimes S^1 \to PU(\mathcal{H})_{c.o.}$ がレベル τ の正エネルギー表現であるとは，次を満たす時をいう．

ρ を，S^1 の表現と思い，普通のユニタリ表現に持ち上げる．S^1 の表現の完全可約性からウェイト分解 $\mathcal{H} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ が定義できる（ここで V_n には S^1 が重み n で作用する）．このとき，各 n に対し V_n は有限次元であり，$V_0 \neq 0$，$V_n = 0$（$n < 0$）を満たす．

射影表現があると，群の中心拡大 LT^τ が定義でき，中心拡大の同型類をレベルという．有限可約なレベル τ の表現のなす半群の *Grothendieck* 構成を $R^\tau(LT)$ と書き，レベル τ の表現群と呼ぶ．レベル τ は，準同型 $\kappa^\tau : \Pi_T \to \Lambda_T$ を定める（*[FHT2]*）．

レベル τ の既約正エネルギー表現の分類定理が知られている．LT の中心拡大の定数ループの集合 T への制限は，T の中心拡大を定める．T^τ の 1 次元表現 (ρ, V) であって，$\rho \circ i(e^{i\theta}) = e^{i\theta} id_V$ となるものを τ-twisted 表現と呼ぶ．その同値類の集合を，Λ_T^τ と書く．表現のテンソル積によって，Λ_T は Λ_T^τ に作用する．この作用と $\kappa^\tau : \Pi_T \to \Lambda_T$ を通じて，Π_T も Λ_T^τ に作用する．

定理 3.2 ([PS]). レベル τ の既約正エネルギー表現の同値類は，商空間 $\Lambda_T^\tau/\kappa^\tau(\Pi_T)$ の点と一対一に対応する．つまり，同型

$$l.w._T : R^\tau(LT) \to \mathbb{Z}[\Lambda_T^\tau/\kappa^\tau(\Pi_T)]$$

が存在する．ここで，右辺は，集合 $\Lambda_T^\tau/\kappa^\tau(\Pi_T)$ で生成される $\mathbb{Z}$ 上の自由加群である．

この定理によって，各軌道 $[\lambda]_T$ に対し，既約表現 $V_{[\lambda]}$ が定義できる．このとき，$l.w._T(V_{[\lambda]}) = [\lambda]_T$ である．この定理については，[PS]，[FHT2]，[高田] に解説がある．

さて，$LT^\tau \rtimes S^1$ の極大連結可換部分群として $T^\tau \times S^1$ が取れることに注意して，Weyl 群を計算しよう．半直積が普通の直積になっているのは S^1 の T^τ への作用が自明だからである．$l \in LT$ の共役作用が $T \times S^1$ を保つとする．このとき，

$$(l, 0)(0_T, \theta_0)(l^{-1}, 0)(\theta) = (l(\theta)l(\theta - \theta_0)^{-1}, 0)$$

が θ によらない定数ループであるとすると，写像 $\theta \mapsto l(\theta)l(0)^{-1}$ が準同型になる．実際に，$t(\theta) := l(\theta)l(0)^{-1} = l(\theta + \theta')l(\theta')^{-1}$ と置くと，

$$t(\theta_1 + \theta_2) = l(\theta_1 + \theta_2)l(0)^{-1} = l(\theta_1 + \theta_2)l(\theta_1)^{-1}l(\theta_1)l(0)^{-1} = t(\theta_2)t(\theta_1).$$

よって，これに対応するループ全体の集合は $T \times \Pi_T$ に同型で，簡単な議論によって l の持ち上げは $T^\tau \times S^1$ を保つので $T^\tau \times S^1$ の正規化群は $(T \times \Pi_T)^\tau$ に同型である．したがって，$LT^\tau \rtimes S^1$ の Weyl 群は Π_T に同型で，定理 3.2 は，Cartan-Weyl 理論のアナロジーであるとみなすことができる．

$f : T' \to T$ を，接写像が単射である連続な群準同型とする．同型 $R(T) \cong \mathbb{Z}[\Lambda_T]$ の右辺のアナロジーで，$char(T, \tau) := \mathbb{Z}[\Lambda_T^\tau/\kappa^\tau(\Pi_T)]$，$char(T', f^*\tau) := \mathbb{Z}[\Lambda_{T'}^{f^*\tau}/\kappa^{f^*\tau}(\Pi_{T'})]$ とおく．「引き戻し」

$$char(f) : char(T, \tau) \to char(T', f^*\tau)$$

を，トーラスの表現環の間の準同型のアナロジーで，Π_T-orbit$[\lambda]_T$ に対し，$\Lambda_{T'}^{f^*\tau}$ の部分集合 ${}^t df(\lambda + \kappa^\tau(\Pi_T))$ を $\Pi_{T'}$-orbit の有限和 $\coprod_{i=1}^N (\mu_i + \kappa^{f^*\tau}(\Pi_{T'}))$ で書き直し，$char(f)([\lambda]_T)$ を，$\sum_{i=1}^N [\mu_i]_{T'}$ と定義することによって定める．計算によって次がわかる．

補題 3.3 ([高田])．（１）$i_1 : T_1 \to T = T_1 \times T_2$ を直積への自然な埋め込みとすると，

$$char(i_1)([\lambda]_T) = [{}^t di_1(\lambda)]_{T_1}.$$

（２）$q : T' \to T$ を有限被覆とすると，

$$char(q)([\lambda]_T) = \sum_{m \in \Pi_T/dq(\Pi_{T'})} [{}^t dq(\lambda) + {}^t dq(\kappa^\tau(m))]_{T'}.$$

m は商空間 $\Pi_T/dq(\Pi_{T'})$ の各要素の代表元である．$[\cdot]_{T'}$ は代表元のとり方によらない．

3.2 主定理

主定理を述べる．$f : T' \to T$ を，接写像が単射である連続な群準同型であるとする．このとき，

$$f^! : R^\tau(LT) \to R^{f^*\tau}(LT')$$

が定義できて，以下の定理が成り立つ．

定理 3.4 (T.)．以下の可換図式が成り立つ．

$$\begin{array}{ccc} R^\tau(LT) & \xrightarrow{f^!} & R^{f^*\tau}(LT') \\ {\scriptstyle l.w._T}\big\downarrow & & {\scriptstyle l.w._{T'}}\big\downarrow \\ char(T, \tau) & \xrightarrow{char(f)} & char(T', f^*\tau) \end{array}$$

f が直積の第一成分への埋め込みであるときと，有限被覆であるときだけを扱う．一般の場合は，中心拡大が正値であることから，直積への埋め込みと有限被覆の合成で標準的に書き直すことができるため，理論的にもこれで十分である．

3.2.1　直積の場合

$T = T_1 \times T_2$，$\tau = p_1^*\tau_1 + p_2^*\tau_2$ とする．つまり，

$$LT^{\tau} \cong LT_1^{\tau_1} \otimes LT_2^{\tau_2} \cong LT_1^{\tau_1} \times_{U(1)} LT_2^{\tau_2}.$$

$i_1 : T_1 \to T$ を自然な埋め込みとする．上の具体的な表現の構成を用いて，i_1^* が well-defined でないことを証明しよう．

命題 3.5.

$$V_{[\lambda]} \cong V_{[{}^t di_1(\lambda)]} \otimes V_{[{}^t di_2(\lambda)]}$$

$V_{[{}^t di_2(\lambda)]}$ は無限次元であるため，$i_1^* V_{[\lambda]}$ は有限可約でない．よって，表現の引き戻しを考えていては，表現環の間の写像は定義できない．そこで，次の定義を考えると定理が成り立つ．

定義 3.6.

$$i_1^! V := \sum_{[\lambda_2] \in \Lambda_{T_2}^{\tau_2}/\kappa^{\tau_2}(\Pi_{T_2})} \mathrm{Hom}_{LT_2^{\tau_2}}(V_{[\lambda_2]}, i_2^* V)$$

命題 3.7.

$$i_1^!(V_{[\lambda]}) \cong V_{[{}^t di_1(\lambda)]}$$

この命題と補題 3.3（1）より，定理を得る．

3.2.2　有限被覆の場合

命題 3.8.

$$q^* V_{[\lambda]} = \bigoplus_{m \in \Pi_T / dq(\Pi_{T'})} V_{[{}^t dq(\lambda) + {}^t dq(\kappa^{\tau}(m))]}$$

補題 3.3（2）により，$q^!$ を q^* と定義することで主定理の可換図式が成り立つことがわかる．

参考文献

[FHT1] D. S. Freed, M. J. Hopkins, and C. Teleman, Loop groups and twisted K-theory I, preprint. arXiv math.AT/0711.1906

[FHT2] D. S. Freed, M. J. Hopkins, and C. Teleman, Loop groups and twisted K-theory II, preprint. arXiv math.AT/0511232.

[PS] A. Pressley, G. Segal, Loop Groups, Oxford University Press, New York, 1986.

[小林大島] 小林俊行，大島利雄，リー群と表現論，岩波書店，2005.

[高田] 高田土満，Naturality of FHT isomorphism, preprint arXiv:1502.03761

[AS] M. Atiyah, G. Segal, twisted K-theory, preprint. arXiv math/0407054