Quasitoric でない toric manifold の例

須山 雄介 *

大阪市立大学大学院理学研究科，2015 年 2 月

この度は，第 12 回城崎新人セミナーに参加させていただきありがとうございました．様々な分野の方々と議論や交流をすることができ，たいへん貴重な経験になりました．このような場を設けてくださった運営委員の方々，そして参加者の皆様に感謝申し上げます．

1　トーリック幾何とは

トーリック幾何学は，代数幾何と組合せ論の間の架け橋である．Toric variety とよばれる，代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の作用をもつ特別な代数多様体は，扇とよばれる組合せ論的な対象と 1 対 1 に対応する．これにより，toric variety の幾何的な性質を扇の言葉で特徴づけたり，逆に組合せ論の問題を幾何を用いて解いたりすることができる．

複素 n 次元の **toric variety** とは，$\mathbb{C}$ 上の正規代数多様体 X であって，$(\mathbb{C}^*)^n$ を稠密な開集合として含み，$(\mathbb{C}^*)^n$ の自分自身への自然な作用を X 全体への作用に拡張するものをいう．$\mathbb{R}^n$ の**有理強凸多面錐**とは，$\mathbb{Z}^n$ の有限個のベクトルではられる錐体 σ であって，$\mathbb{R}^n$ の 0 でないいかなる線形部分空間も含まないものをいう．$\mathbb{R}^n$ の**扇**とは，有理強凸多面錐からなる空でない有限集合であって，次の条件を満たすものをいう．

1. $\sigma \in \Delta$ ならば，σ の各面もまた Δ に属する．
2. $\sigma, \tau \in \Delta$ ならば，$\sigma \cap \tau$ はそれぞれの面である．

トーリック幾何の基本定理より，複素 n 次元の toric varieties の同型類と，$\mathbb{R}^n$ の扇は 1 対 1 に対応する．Toric varieties と，対応する扇の例を図 1 に示す．

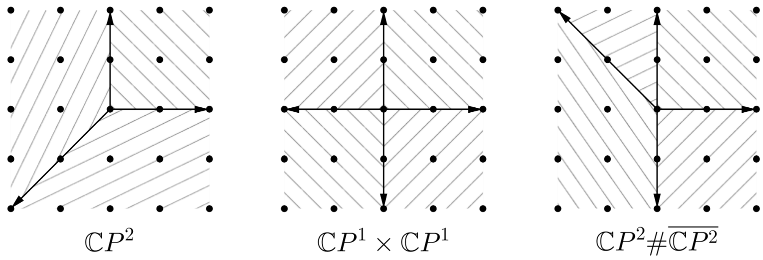

図 1: Toric varieties と扇の例．

*yusuke.suyama.rp30@gmail.com

$\mathbb{Z}^n$ の基底の一部ではられる錐体を**非特異**な錐体という．扇 Δ が**非特異**であるとは，Δ の各錐体が非特異であることをいう．Δ が**完備**であるとは，Δ の錐体たちが $\mathbb{R}^n$ を覆うことをいう：$\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma = \mathbb{R}^n$. Toric varieties と扇の間には，表 1 のような関係がある．

toric varieties	扇
複素 n 次元	$\mathbb{R}^n$ の扇
滑らか	非特異
コンパクト	完備
オイラー標数	n 次元の錐体の数

表 1: Toric varieties と扇の対応.

たとえば，図 1 の扇はすべて非特異かつ完備であり，対応する toric varieties は確かに滑らかでコンパクトである．本書では，滑らかでコンパクトな toric varitey を **toric manifold** とよぶ.

他にも，toric varieties の基本群やコホモロジー環（滑らかでコンパクトのとき）も扇の言葉で記述できることが知られている．

2 主結果

X を複素 n 次元の toric manifold とする．代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の作用を n 次元トーラス $(S^1)^n$ の作用に制限すると，一般に軌道空間 $X/(S^1)^n$ は角付き多様体になり，すべての面は可縮で，面たちの空でない共通部分は連結となる．

多面体の余次元 1 の面を**ファセット**とよぶ．n 次元多面体が**単純**であるとは，各頂点に n 個のファセットが集まっていることをいう．X が射影的または $n \leq 3$ ならば，$X/(S^1)^n$ は単純な多面体に角付き多様体として同相になる．これに対し，次の定理を証明した．

定理 2.1 (Suyama [S]). 各 $n \geq 4$ に対し，複素 n 次元の toric manifolds X で，$X/(S^1)^n$ がいかなる単純な多面体とも角付き多様体として同相にならないものが無限に存在する．

必ずしも代数多様体でない，より広いクラスの多様体を扱う**トーリックトポロジー**において，toric manifolds の位相幾何的な一般化を求めることは基本的な問題である．そのようなクラスであると考えられていたものに quasitoric manifolds がある．

定義 2.2 (Davis-Januszkiewicz [DJ]). 実 $2n$ 次元可微分閉多様体 X が **quasitoric manifold** であるとは，X が $(S^1)^n$ の可微分な作用をもち，次を満たすことをいう．

1. $(S^1)^n$ の作用は locally standard である．すなわち，X は局所的に $(S^1)^n$ の忠実な複素 n 次元表現と同変同相である．
2. 軌道空間 $X/(S^1)^n$ はある単純な多面体に角付き多様体として同相である．

注意 2.3. Davis-Januszkiewicz は，定義 2.2 の多様体を toric manifold とよんでいるが，本書では滑らかでコンパクトな toric variety を toric manifold とよんでいるため，衝突を避けるため前者を quasitoric manifold とよぶことにする．

X が toric manifold ならば，$(\mathbb{C}^*)^n$ の作用を $(S^1)^n$ に制限したものは locally standard である．したがって，複素 n 次元の toric manifold X は，射影的または $n \leq 3$ ならば quasitoric manifold で

ある．Toric manifold でない quasitoric manifold の例として，複素構造を持たない $\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2$ がある．一方，quasitoric manifold でない toric manifold の存在性は，2002 年に Buchstaber-Panov の本 [BP] で未解決問題として取り上げられて以来，これまで例が知られていなかった．定理 2.1 より，quasitoric manifold でない toric manifold が無限に存在する．これは，そのような多様体の初めての例を与える．すなわち，quasitoric manifolds は toric manifolds の一般化ではなかったことになる（図 2）．

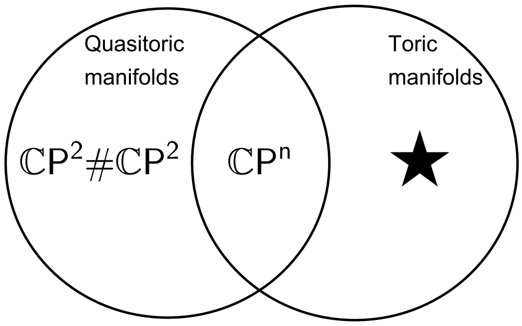

図 2: Toric manifolds と quasitoric manifolds の関係.

注意 2.4. Toric manifolds と quasitoric manifolds を真に含む **topological toric manifolds** というクラスがある [IFM]．Topological toric manifolds は，非特異で完備な**位相的扇**とよばれる組合せ論的な対象との 1 対 1 対応がある．これは，toric manifolds と非特異で完備な扇の 1 対 1 対応を自然に拡張するものであり，これこそが toric manifolds の正しい位相幾何的な一般化と考えられる．

3 証明の方針

Δ を m 本の edge vectors $v_1 \ldots, v_m$ ではられる非特異な扇とする．Δ の **underlying simplicial complex** K_Δ を

$$\{I \subset \{1, \ldots, m\} \mid \{v_i \mid i \in I\} \text{ は } \Delta \text{ の錐体をはる } \}$$

で定める．$n-1$ 次元球面 S^{n-1} の三角形分割を**単体的** $n-1$ **球面**とよぶ．Δ が $\mathbb{R}^n$ の非特異で完備な扇ならば，K_Δ は単体的 $n-1$ 球面になる（図 3）．

Toric varieties と扇の対応である表 1 に付け加わるものとして，次の命題がある．

命題 3.1. Δ を $\mathbb{R}^n$ の非特異で完備な扇とする．このとき，対応する toric manifold の軌道空間 $X(\Delta)/(S^1)^n$ が単純な多面体であるための必要十分条件は，K_Δ がある n 次元多面体の境界として実現できることである．

これにより，定理 2.1 を示すには，非特異で完備な扇であって，その underlying simplicial complex が多面体の境界として実現できないものを構成すればよいことになる．いいかえれば，多面体の境界にならない単体的球面の各頂点にベクトルを対応させ，非特異で完備な扇が得られればよい．

任意の単体的 1 球面および単体的 2 球面は多面体の境界になる．単体的 3 球面では，頂点数が 7 以下ならば多面体の境界になる．頂点数 8 で初めて多面体の境界にならないものが存在する．そ

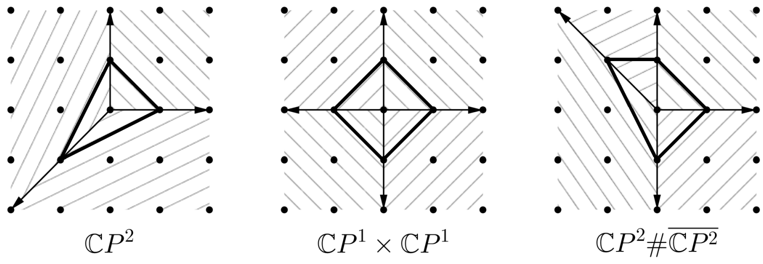

図 3: 扇とその underlying simplicial complexes.

れには Brückner 球面，Barnette 球面 [B] の 2 種類があるが，f ベクトル（各次元の面の数，ここでは頂点，辺，三角形，四面体の数を並べたもの）はそれぞれ $(8,28,40,20),(8,27,38,19)$ であり，面の数が少ない Barnette 球面を用いることにする．

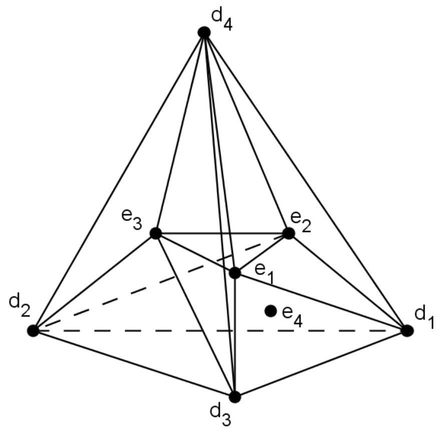

図 4: Barnette 球面.

命題 3.1 により，Barnette 球面の各頂点にベクトルを対応させ，非特異で完備な扇が得られれば，複素 4 次元の，軌道空間が単純な多面体にならない toric manifold が得られたことになるが，実は，そのようにベクトルをとることはできないことがわかっている．

命題 3.2 (Ishida-Fukukawa-Masuda [IFM]). Barnette 球面は $\mathbb{R}^4$ の非特異で完備な扇の underlying simplicial complex になり得ない．

以上の事実を踏まえて，次のような方針を採る．

Step 1. とりあえず，$\mathbb{R}^4$ の特異で完備な扇 Δ であって，その underlying simplicial complex K_Δ が Barnette 球面であるものを 1 つ構成する．

Step 2. Δ の錐体のうち，特異なものをすべて細分して非特異な扇 Δ' を得る．対応する toric variety $X(\Delta')$ は複素 4 次元の toric manifold である（この操作はブローアップによる特異点解消に対応している）．

Step 3. Barnette 球面 K_Δ の細分もまた多面体の境界にならないかどうかは一般にはわからないので，改めて $K_{\Delta'}$ が多面体の境界にならないことを示す．したがって，$X(\Delta')/(S^1)^4$ は単純な多面体ではない．

Step 4. 多面体の境界にならないという性質は，単体的球面の「局所的な」状況で決まる．すなわち，特定の構造の部分複体を含んでいると，多面体の境界にならなくなるのである．ゆえに，そこから離れた面に対応する錐体を更に細分することで，求める多様体が複素 4 次元で無限に得られる．

Step 5. 多面体の境界にならないという性質は懸垂で保たれる．ゆえに，Step 4 で無限に得られた扇の underlying simplicial complex の懸垂をとることで，求める多様体が高次元でも無限に得られ，定理 2.1 の証明が完成する（この操作は $\mathbb{C}P^1$ を直積することに対応している）．

証明の要は，Step 1 において，以下に述べるような性質のよい扇 Δ を見つけることである．Step 3 の証明であるが，Barnette 球面がそうであることの証明 [E, 5.3 Theorem, Chapter III] と同様の議論で示したい．そのためには，Barnette 球面 K_Δ が含む，Step 4 で述べたような部分複体の構造を，Step 2 で変えないようにしなければならない．すると，Step 1 の Δ として，その部分複体に対応する錐体が非特異であるようなもの，特に，19 個の 4 次元錐体のうち「大部分が」非特異であるようなものをとってくる必要がある．

各 4 次元錐体ごとに，Barnette 球面の 8 頂点に対応させたベクトルの成分に関する方程式が定まる．上の問題は，この 19 個の方程式のうち大部分を満たすものを求めるという問題に帰着するが，これを手計算で求めるのは困難であった．そこで，コンピュータでベクトルをランダム生成することにより，19 個の 4 次元錐体のうち 14 個が非特異である扇 Δ が得られた．これを細分すると f ベクトルが $(18, 73, 110, 55)$ の非特異扇 Δ' が得られ，Step 3 も問題なく進み，定理 2.1 の証明が完成した．

参考文献

[B] D. Barnette, *Diagrams and Schlegel diagrams*, 1970 Combinatorial Structures and their Applications (Proc. Calgary Internat. Conf., Calgary, Alta.) pp. 1–4 Gordon and Breach, New York.

[BP] V. M. Buchstaber and T. E. Panov, *Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics*, University Lecture series, vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2002.

[DJ] M. W. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. **62** (1991), 417–451.

[E] G. Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. vol. 168, Springer–Verlag, New York, 1996.

[IFM] H. Ishida, Y. Fukukawa and M. Masuda, *Topological toric manifolds*, Moscow Math. J. **13** (2013), no. 1, 57–98.

[S] Y. Suyama, *Examples of smooth compact toric varieties that are not quasitoric manifolds*, Algebraic & Geometric Topology **14** (2014), 5, 3097–3106.