混合 Frobenius 多様体と混合 trTLEP 構造

社本　陽太 *

京都大学数理解析研究所　修士 2 年，2015 年 2 月

概 要

本稿では, 筆者の修士論文の結果について, 講演内容に沿ってより詳しい解説をします. 講演で話した主な結果は二つでした. 二つはどちらも局所ミラー対称性における混合 Frobenius 多様体の構成定理であり, どちらも混合 trTLEP 構造から混合 Frobenius 多様体を得る一般論に基づいています. 本稿では特にこの一般論の説明に重点をおいて解説します.

1　研究の背景

まず, 研究の背景について説明します. 筆者の結果は局所ミラー対称性予想に関するものですが, 局所ミラー対称性はミラー対称性予想の一つの variant にあたるものです. そこで, まずミラー対称性について解説したあと, 局所ミラー対称性における研究背景に入ります.

1.1　ミラー対称性と Frobenius 多様体

ミラー対称性予想という物理学の弦理論に端を発する予想があります. これは, A モデルと B モデルと呼ばれる二つのモデルの等価性を主張するもです. この等価性に基づいて, A モデル側の射影的 Carabi-Yau 多様体 X の有理曲線の数え上げ (Gromov-Witten 不変量の計算) 問題を B モデル側の Carabi-Yau 多様体 $\hat{X}$ における Picard-Fuchs 型の微分方程式 (Hodge 構造の変動) を用いて計算するという結果が示されて, 数学者に衝撃を与えました.

この結果は, 有理曲線の数え上げ問題という未解決の難問が (ある場合に) 解決されたというだけでなく, 次の二つの点で非自明であったと言えます.

1. 多様体 X の性質が異なる多様体 $\hat{X}$ の性質を用いて記述される点.

2. シンプレクッティック幾何学的性質が複素幾何学性質を用いて記述される点.

この非自明な対応に数学的な説明を与えることがミラー対称性において重要な問題となります. そのために, ミラー対称性予想は様々な形で定式化され, 多くの例について予想が正しいことが証明されています. しかし, 一般的な形での定式化や証明からは遠く, また, 様々な定式化たちの間の関係も未解決のものが数多くあります.

これら様々な定式化のうちの一つに, Frobenius 多様体による定式化があります. まず, A モデル, B モデルのそれぞれにおいて, Frobenius 多様体 $\mathscr{F}_A, \mathscr{F}_B$ を構成します. このとき, A モデルにおいては X のシンプレクッティック幾何学的性質 (Gromov-Witten 不変量) を用いて, B モデルにおいては, $\hat{X}$ の複素幾何学的性質 (Hodge 構造の変動) を用いて, Frobenius 多様体を構成します. そし

*shamoto@kurims.kyoto-u.ac.jp

て, ミラー対称性予想を, Frobenius 多様体の同型 $\mathscr{F}_A \simeq \mathscr{F}_B$ として定式化します. 二つの異なる幾何学から同じ種類の構造を取り出し, その構造の間の同型として予想が定式化されたことに注目してください.

Frobenius 多様体によって定式化されたミラー対称性予想についても, 弱 Fano トーリック多様体の場合など多くの場合に予想が証明されています ([8]).

1.2 局所ミラー対称性と混合 Frobenius 多様体

局所ミラー対称性は, ミラー対称性の「非コンパクト版」にあたります. つまり, A モデルに現れる Carabi-Yau 多様体 X が (局所 Carabi-Yau と呼ばれる) 非コンパクトな多様体である場合のミラー対称性が局所ミラー対称性です.

局所ミラー対称性については, Chiang-Klemm-Yau-Zaslow[2] が, 数学的な解釈とそれを用いた計算例を与えました. 通常のミラー対称性と同様, 計算の背景にある構造を求めることが次の目標になります.

Konishi-Minabe は, [7] において局所 B モデルの計算の背後に相対コホモロジーの定める混合 Hodge 構造の変動があることを見抜きました. この観察に基づいて, 彼らは Frobenius 多様体を一般化した混合 Frobenius 多様体を導入し, 局所ミラー対称性は混合 Frobenius 多様体の同型として定式化できるだろうと予想しました ([5]).

実際, Konishi-Minabe は [5, 6] において, 局所 Gromov-Witten 不変量を用いて局所 A モデルにおける混合 Frobenius 多様体を構成しました. 一方で, 局所 B モデルにおける混合 Frobenius 多様体の構成はなされていませんでした.

したがって, 次の課題は局所 B モデルにおける混合 Frobenius 多様体の構成, 及び (構成されたものとして) 二つの混合 Frobenius 多様体の同型を証明することになります.

2 主結果

筆者の修士論文における主な結果の一つは, 局所 B モデルにおける混合 Frobeniu 多様体を (あるデータを加味することで) 構成したことです (定理 2.6).

概要でも述べたように, この結果は一般に混合 trTLEP 構造という構造から混合 Frobenius 多様体を構成する定理 (定理 2.4. 以下, これを構成定理と呼びます.) を局所 B モデルの場合に適用することで得られます. 以下では, まず, 混合 Frobenius 多様体とこの混合 trTLEP 構造の定義を述べ, 構成定理の主張を与えます. その後, 構成定理をどのように局所 B モデルに適用するかを説明します.

講演では, 局所 A モデルにおける Konishi-Minabe の構成した混合 Frobenius 多様体を, この構成定理を用いて再構成する結果についても話しました. この結果の説明は紙数の関係でここでは割愛します.

2.1 混合 Frobenius 多様体の構成定理

まず, 混合 Frobenius 多様体の定義を説明します. 複素多様体 M に対して, $\mathcal{O}_M$ を M 上の正則関数のなす層, Θ_M を正則接ベクトル束, Ω^1_M を正則余接束とします. また, ベクトル束とそれが定義する $\mathcal{O}_M$ 局所自由層を同一視します.

定義 2.1 ([5, 6])**.** 複素多様体 M 上の**混合 Frobenius 構造**とは, 次の以下の組 $\mathscr{F} = (\circ, e, \nabla, E, W, g)$ であって, いくつかの条件をみたすものである.

- M の正則接ベクトル束 Θ_M 上の可換な積 $\circ$ とその単位元切断 $e \in \Gamma(M, \Theta_M)$,
- 捩れのない (torsion free) 平坦接続 $\nabla : \Theta_M \to \Theta_M \otimes \Omega_M^1$,
- 正則ベクトル場 $E \in \Gamma(M, \Theta_M)$ (Euler ベクトル場と呼ばれる),
- 可換 $\mathcal{O}_M$ 代数 $(\Theta_M, \circ)$ のイデアルからなる部分ベクトル束のなす増大列 $W = (W_k \mid k \in \mathbb{Z})$,
- 部分商 $\mathrm{Gr}_k^W \Theta_M = W_k / W_{k-1}$ 上の非退化対称形式の列 $g = (g_k \mid k \in \mathbb{Z})$.

複素多様体 M とその上の混合 Frobenius 構造の組 $(M, \mathscr{F})$ を**混合 Frobenius 多様体**と呼ぶ. (組 $(M, \mathscr{F})$ も単に $\mathscr{F}$ と書く.)

混合 Frobenius 多様体の定義は, W が自明なフィルターのとき, Frobenius 多様体の定義に対応しています. 混合 Frobenius 構造のみたすべき条件のうち, 後の説明に必要な部分を説明します.

$\mathbb{P}_\lambda^1$ を複素射影直線, λ を非斉次座標とします. また, $p : \mathbb{P}_\lambda^1 \times M \to M$ を自然な射影とします. 引き戻し $p^*\Theta_M$ 上の有理型接続 $\hat{\nabla}$ を次のように定義します.

$$\hat{\nabla} := \nabla + \frac{1}{\lambda}\mathcal{C} - \left(\frac{1}{\lambda}\mathcal{C}_E + \nabla_\bullet E\right)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}. \tag{2.1}$$

ここで, $\mathcal{C}$ は $\mathcal{C}_x y := -x \circ y$ $(x, y \in \Theta_M)$ で定まる Θ_M 上の Higgs 場で, 右辺では p による引き戻しを省略しています.

混合 Frobenius 構造の条件の一つは, 式 (2.1) で定義される接続 $\hat{\nabla}$ が平坦であることです.

次に, 混合 trTLEP 構造の定義を説明します.

定義 2.2. 複素多様体 M 上の**混合 trTLEP 構造**とは, 次の組 $\mathcal{T} = (H, \widetilde{\nabla}, \widetilde{W}, P)$ であって, いくつかの条件をみたすものである.

- $\mathbb{P}_\lambda^1 \times M$ 上の正則ベクトル束 H であって, 随伴射 $p^*p_*H \to H$ が同型であるもの,
- H 上の有理型平坦接続 $\widetilde{\nabla}$ であって, $\{0, \infty\} \times M$ にのみ, ある種の特異性を持つもの,
- H 上の $\widetilde{\nabla}$ 不変な部分束からなる増大列 $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_k \mid k \in \mathbb{Z})$,
- $\mathrm{Gr}_k^{\widetilde{W}} H$ 上の $(-1)^k$ 対称なペアリングの列 $P = (P_k \mid k \in \mathbb{Z})$.

ここで, 正則写像 $f : M_0 \to M_1$ にと, M_1 上の混合 trTLEP 構造に対して引き戻し $f^*\mathcal{T}$ が定義できることに注意しておきます. 次の補題は, 比較的容易に証明できます.

補題 2.3. $\mathscr{F}$ を混合 Frobenius 多様体とする. このとき, 混合 trTLEP 構造 $\mathcal{T}(\mathscr{F})$ が自然に誘導される. $\square$

特に, $\mathcal{T}(\mathscr{F}) = (H, \widetilde{\nabla}, \dots)$ と書いたとき, $H := p^*\Theta_M$, $\widetilde{\nabla} = \hat{\nabla}$(式 2.1 参照) です.

一方で, この逆は一般には成り立ちません. つまり, 複素多様体 M 上の任意の混合 trTLEP 構造から, M 上の混合 Frobenius 構造が構成できるわけではありません. 例えば, 混合 trTLEP 構造 $\mathcal{T} = (H, \nabla, \dots)$ で, H の階数が M の次元と一致していないときなどが自明な反例となります. また, 補題 2.3 で実は混合 Frobenius 多様体の単位元切断 e の情報が落ちていることも注意しておきます.

混合 Frobenius 多様体の構成定理とは, H の階数が M の次元より高い場合に, 単位元 e にあたる情報を付加することで, M を (局所的に) 「開折」した多様体 $\widetilde{M}$ 上に混合 Frobenius 構造が構成できることを主張する定理です.

定理 2.4. [1] 複素多様体の芽 $(M,0)$ 上の混合 trTLEP 構造 $\mathcal{T}=(H,\nabla,W,P)$ に対して, H の大域切断 ξ が「ある条件」をみたすとする. このとき, 次の組 $(\mathscr{F},\iota,i)$ が同型を除いて一意的に存在する.

1) 混合 Frobenius 多様体 (の芽)$\mathscr{F}=((\widetilde{M},0),\circ,e,\nabla,E)$,

2) 埋め込み $\iota:(M,0)\hookrightarrow(\widetilde{M},0)$,

3) 混合 trTLEP 構造の同型 $i:\mathcal{T}\xrightarrow{\sim}\iota^*\mathcal{T}(\mathscr{F})$ であって, ξ が e に対応するもの. □

条件 3 より, H の階数が $(\widetilde{M},0)$ の次元と一致すること, したがって (条件 2 より)$(M,0)$ の次元より大きいことがわかります. また, ξ が単位元にあたる情報になっています.

2.2 局所 B モデルへの応用

次に, 定理 2.4 の局所 B モデルへの応用について説明します. まず, 複素多様体の芽 $(M,0)$ 上の次数付き偏極可能な混合 Hodge 構造の変動 $\mathscr{H}=(V_{\mathbb{Q}},F,W)$ を考えます. ここで, $V_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ 上の局所系, F は Hodge フィルター, W はウェイトフィルターを表します. このとき, 次の補題が成り立ちます.

補題 2.5. $\mathscr{H}=(V_{\mathbb{Q}},F,W)$ を上で定義した混合 Hodge 構造の変動, U を F に対する相反フィルター (opposite filtration), 次数付き偏極 $S=(S_k\mid k\in\mathbb{Z})$ を固定するごとに, 混合 trTLEP 構造 $\mathcal{T}(\mathscr{H},U,S)$ が自然に構成される.

構成は Rees construction と呼ばれる構成法でなされます. また, $\mathcal{T}(\mathscr{H},U,S)$ に対する定理 2.4 の「ある条件」を, $\mathscr{H}$ に対する条件として書き直すことができます.

さて, 局所 B モデルの設定に入ります. (ここでは, 2 次元の場合に限りますが, 適切な仮定のもとで一般の次元にも拡張できます.) Δ を 2 次元反射的整多面体とします. $(\mathbb{C}^*)^2$ の Δ によって定まるある種のアフィン超曲面のなすモジュライ空間を $\mathcal{M}(\Delta)$ とします. ($\mathcal{M}(\Delta)$ の構成法は, [1] 参照.) また, 各点 $[F]\in\mathcal{M}(\Delta)$ に対し, $V_F\subset(\mathbb{C}^*)^2$ を対応するアフィン超曲面とします.

$\mathcal{M}(\Delta)$ の安定でなめらかな点 $[F_0]$ を固定すると, 相対コホモロジー $H^2((\mathbb{C}^*)^2,V_F)$, $([F]\in\mathcal{M}(\Delta))$ に定まる混合 Hodge 構造から, 芽 $(\mathcal{M}(\Delta),[F_0])$ 上に混合 Hodge 構造の変動 $\mathscr{H}_\Delta$ が定まります. 補題 2.5 と構成定理 2.4 によって混合 Frobenius 多様体が得られます.

定理 2.6. $\mathscr{H}_\Delta$ の次数付き偏極 S, 相反フィルター U および「ある条件」をみたす切断 ξ を固定する. このとき, 次の組 $(\mathscr{F},\iota,i)$ が同型を除いて一意的に定まる.

1) 混合 Frobenius 多様体 $\mathscr{F}=((\widetilde{M},0),\circ,e,\nabla,E,W,g)$,

2) 埋め込み $\iota:(\mathcal{M}(\Delta),[F_0])\hookrightarrow(\widetilde{M},0)$,

3) 混合 trTLEP 構造の同型 $i:\mathcal{T}(\mathscr{H}_\Delta,S,U)\xrightarrow{\sim}\iota^*\mathcal{T}(\mathscr{F})$ で, ξ が e に対応するもの. □

定理の「ある条件」をみたす ξ が存在することは, $\mathscr{H}_\Delta$ の組み合わせ論的表示 ([1], [7]) からわかります. 定理の中の相反フィルター U や次数付き偏極 S を, 局所ミラー対称性の状況で適切に定めることが次の課題です.

[1] この定理は, Hertling-Manin[3] の Theorem 4.5 の混合 Frobenius 多様体への拡張となっています. 有理型平坦接続の開折 (unfolding) の概念は, この論文 [3] で定義されました. この概念は混合 trTLEP 構造の場合に自然に拡張されます.

謝辞

この度は, 第 12 回城崎新人セミナーに参加させていただきありがとうございました. セミナーを企画, 運営して下さった委員の皆様と, 熱心に議論をして下さった参加者の皆様に感謝いたします.

参考文献

[1] V. V. Batyrev, *Variations of the mixed Hodge structure of affine hypersurfaces in algebraic tori.* Duke Math. J. **69** (1993), 349-409.

[2] T. M. Chiang, A. Klemm, S. T. Yau, E. Zaslow, *Local mirror symmetry: calculations and interpretations.* Adv. Theor. Math. Phys. **3** (1999), 495-565.

[3] C. Hertling, Y. Manin, *Unfoldings of meromorphic connections and a construction of Frobenius manifolds.* Frobenius manifolds, Aspects Math., **E36**, Vieweg, Wiesbaden, 2004, 113-144.

[4] L. Katzarkov, M. Kontsevich, T. Pantev, *Hodge theoretic aspects of mirror symmetry.* From Hodge theory to integrability and TQFT tt*-geometry, 2008, 87-174.

[5] Y. Konishi, S. Minabe, *mixed Frobenius structure and local A-model.* arXiv:1209.5550

[6] Y. Konishi, S. Minabe, *local quantum cohomology and mixed Frobenius structure.* arXiv:1405.7476

[7] Y. Konishi, S. Minabe, *Local B-model and mixed Hodge structure.* Adv. Theor. Math. Phys. **14**(2010), 1089-1145

[8] T. Reichelt, C. Sevenheck, *Logarithmic Frobenius manifolds, hypergeometric systems and quantum D-modules*, arXiv:1010.2118

[9] C. Sabbah *Isomonodromic deformations and Frobenius manifolds. An introduction.* Universitext. Springer-Verlag London.