

Hardy inequality with remainder terms in a limiting case

佐野 めぐみ*

大阪市立大学 理学研究科 数物系専攻 前期博士課程 2年, 2015年 2月

1 研究の動機と導入

本研究は大阪市立大学の高橋太教授との共同研究である.

$\Omega \subset \mathbf{R}^N$ を滑らかな有界領域, $0 \in \Omega$, $N \geq 2, 1 < p < N$ とする. 古典的な Hardy 不等式

$$\left(\frac{N-p}{p}\right)^p \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx \quad (\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)) \quad (1)$$

において, 定数 $\left(\frac{N-p}{p}\right)^p$ は最良であり, 達成されないことが知られている. すなわち不等式 (1) の等号が成立する $W_0^{1,p}(\Omega)$ 関数は存在しない. (Sobolev 空間 $W_0^{1,p}(\Omega)$ の定義は [8] を参照して頂きたい.) この事実は, 不等式 (1) の左辺に剰余項を加えることができる可能性を示唆しており, 実際にさまざまな剰余項が求められている (see [1], [3], [4], [5] etc.). 例えば $p = 2$ の場合, Chaudhuri-Ramaswamy[4] により, 任意の $0 \leq \beta < 2$ と $1 < q < 2_{\beta}^* := \frac{2(N-\beta)}{N-2}$ に対して, ある定数 $C = C(N, \beta, q, \Omega) > 0$ が存在し, 次の不等式が成立することが証明されている.

$$\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2} dx + C \left(\int_{\Omega} \frac{|u(x)|^q}{|x|^{\beta}} dx\right)^{\frac{2}{q}} \leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \quad (\forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)). \quad (2)$$

さらに Vázquez-Zuazua[12] は, (1) の剰余項を用いて, 特異性があるポテンシャルをもつような放物型偏微分方程式の解の時間大域的挙動について研究を行った. このように剰余項を研究することは, 不等式自体の興味もさることながら, 方程式への応用の観点からも重要であると言える.

一方で $p = N$ の場合, 通常の Hardy 不等式 (1) は成立せず, 対数補正項を付けた臨界 Hardy 不等式 (3) が成立することが知られている.

$$\left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^N}{|x|^N (\log \frac{R\epsilon}{|x|})^N} dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^N dx \quad (\forall u \in W_0^{1,N}(\Omega), \tilde{R} := \sup_{x \in \Omega} |x|). \quad (3)$$

定数 $\left(\frac{N-1}{N}\right)^N$ は一般の有界領域において最良で ([2], [10]), 達成されないことが知られている ([6]). 我々は臨界 Hardy 不等式 (3) における剰余項について研究を行った.

注意 1 Adimurthi-Chaudhuri-Ramaswamy [1] によって以下が示されている.

$T > 0, B_T(0) \subset \mathbf{R}^2, R = e^{e^{(k\text{-times})} T}$ とする (i.e. $k = k(R)$ は $0 < \log^{(k)} \frac{R}{T}$ を満たす. ただし $\log^{(1)}(\cdot) := \log(\cdot), \log^{(k)}(\cdot) := \log(\log^{(k-1)}(\cdot))$ ($k \geq 2$) とする) このとき以下の不等式が成立

*m13saM0311@st.osaka-cu.ac.jp

する.

$$\frac{1}{4} \sum_{j=1}^k \int_{B_T(0)} \frac{|h(x)|^2}{\left(|x| \prod_{i=1}^j \log^{(i)} \frac{R}{|x|}\right)^2} dx \leq \int_{B_T(0)} |\nabla h(x)|^2 dx \quad (\forall h \in W_0^{1,2}(B_T(0))) \quad (4)$$

一見上記の不等式 (4) は, (3) の剰余項を得たように見える. しかしながら仮定 $R = e^{e^{(k\text{-times})} T}$ により, “本当の意味”で (3) の剰余項を得たとは言えない (我々が得たいのは $R = eT$ の場合であるので, $k = 1$ となってしまう).

また *Adimurthi-Sandeep*[2] らは上述の結果を述べた論文 [1] を引用することにより, 以下の不等式を 証明なしで 記述している.

$$\left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^N}{|x|^N \left(\log \frac{R}{|x|}\right)^N} dx + C \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^N}{|x|^N \left(\log \frac{R}{|x|}\right)^N \left(\log^{(2)} \frac{R_1}{|x|}\right)^N} dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^N dx$$

($\forall u \in W_0^{1,N}(\Omega)$). ただし $R \geq e \sup_{x \in \Omega} |x|$, $R_1 \geq (e^e)^{\frac{2}{N}} \sup_{x \in \Omega} |x|$ とする.

このように今まで (3) の剰余項は曖昧にされてきたように思える. しかしながら今回得られた主結果はその曖昧な部分を明らかにしたと言える.

2 主結果

定理 1 [[10]M.Sano-F.Takahashi] $N \geq 2, \Omega \subset \mathbf{R}^N$ は境界が滑らかな有界領域, $R > 0$ は $|B_R(0)| = |\Omega|$ を満たす数, $\tilde{R} := \sup_{x \in \Omega} |x|$, $0 < q < N$ と $L > -1$ は $\alpha^* < \alpha := \frac{N-1}{N}q + L + 2 \leq N$ を満たす数とする. このとき任意の $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ に対して, 以下の不等式が成立する.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^N dx &\geq \left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^N}{|x|^N \left(\log \frac{\tilde{R}e}{|x|}\right)^N} dx \\ &+ \omega_N^{1-\frac{N}{q}} C(L, N, q)^{\frac{N}{q}} \left(\int_{\Omega} \frac{|u(x)|^q}{|x|^N \left(\log \frac{\tilde{R}e}{|x|}\right)^{\alpha} dx} \right)^{\frac{N}{q}}. \end{aligned} \quad (5)$$

ただし $C(L, N, q) := (L+1)^{-(1+\frac{N-1}{N}q)} \Gamma\left(\frac{N-1}{N}q + 1\right)$, $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数, $\alpha^* := \frac{N-1}{N}q + 1$ とする.

不等式 (5) の剰余項に登場する α^* は最良であることがわかっている. そして証明を少し変えると, 不等式 (5) の他にも様々な剰余項を求めることができる. また主定理の方程式への応用として, 異なる重みを持った次の楕円型 N -ラプラス方程式の弱解の存在・非存在を考えることができる (以上の3点は本稿では割愛する).

$$(P)_{\mu}^{\lambda} \begin{cases} -\Delta_N u &= \mu \frac{|u|^{N-2} u}{\left(|x| \log \frac{\tilde{R}e}{|x|}\right)^N} + \lambda |u|^{q-2} u f(x) & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

ただし $\mu, \lambda > 0$, $\Delta_N u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2} \nabla u)$, u は $u(x)$ の略とする.

3 証明の概略と新しいアイデア

臨界 Hardy 不等式 (3) の剰余項を求める際にも, 古典的な Hardy 不等式 (1) の場合と同様に重要であると思われるのは, Brezis-Vazquez [3] によるアイデアと球対称再配列の議論の組み合わせである. 端的に述べると,

・Brezis-Vazquez のアイデア … (3) の等号を満たす “形式的な” 関数 $\left(\log \frac{Re}{|x|}\right)^{\frac{N-1}{N}} \left(W^{1,N}(B_R(0))\right)$ 関数に入っていないことに注意する) と $u(x)$ の違いを見るために, 変換 $v(x) = \left(\log \frac{Re}{|x|}\right)^{-\frac{N-1}{N}} u(x)$ を行い, 新しい関数 v に対しての評価を行う. (Sobolev 空間 $W^{1,N}(B_R(0))$ の定義は [8] を参照して頂きたい.)

・球対称再配列の議論 … 球対称減少な関数 $u = u(|x|)$ に関してのみ証明すればよく, “問題を一次元化できる” というメリットをもつ. 特に Pólya-Szegő の不等式や Riesz’s rearrangement inequality を用いる (詳しくは [7], [9] を参照).

しかしながら, 臨界 Hardy 不等式の場合にはその 2 つだけでは上手くいかない (正確には “嫌な” 重み付きの Poincaré 不等式を考察しなければいけなくなり, 上手く証明できない). 新しいスケール変換 (6) も同時に組み合わせたことが証明の鍵となっている. 主結果に必要な補題を一つ準備し, 主結果の証明に入る.

補題 1 [[5] Lemma 1] $p \geq 2, \xi, \eta \in \mathbf{R}$ s.t. $\xi \geq 0, \xi - \eta \geq 0$ とする. このとき以下の評価が成立する.

$$(\xi - \eta)^p + p\xi^{p-1}\eta - \xi^p \geq \max\{(p-1)\eta^2\xi^{p-2}, |\eta|^p\}$$

定理 1 の証明 [Step 1] まず $\Omega = B_R(0)$ (i.e. $R = \tilde{R}$) で, $r = |x|$ に関して単調減少な球対称関数 $u \in C_0^\infty(B_R(0))$ に関して結論の不等式 (5) を示す. 次の変換を導入する.

$$v(s) = \left(\log \frac{Re}{r}\right)^{-\frac{N-1}{N}} u(r) \text{ where } s = s(r) = \left(\log \frac{Re}{r}\right)^{-1}, s'(r) = \frac{s(r)}{r \log \frac{Re}{r}} \geq 0, v \in C_0^1([0, 1]) \quad (6)$$

したがって,

$$\begin{aligned} I &:= \int_{B_R(0)} |\nabla u(x)|^N dx - \left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_{B_R(0)} \frac{|u(x)|^N}{|x|^N (\log \frac{Re}{|x|})^N} dx \\ &= \omega_N \int_0^R |u'(r)|^N r^{N-1} dr - \left(\frac{N-1}{N}\right)^N \omega_N \int_0^R \frac{|u(r)|^N}{r (\log \frac{Re}{r})^N} dr \\ &= \omega_N \int_0^R \left(\frac{N-1}{N} \left(\log \frac{Re}{r}\right)^{-\frac{1}{N}} \frac{v(s(r))}{r} - \left(\log \frac{Re}{r}\right)^{\frac{N-1}{N}} v'(s(r))s'(r) \right)^N r^{N-1} dr \\ &\quad - \left(\frac{N-1}{N}\right)^N \omega_N \int_0^R \frac{|u(r)|^N}{r (\log \frac{Re}{r})^N} dr \quad (u'(r) \leq 0 \text{ より従う}) \end{aligned} \quad (7)$$

が成立する. ここで補題 1 の ξ と η を, $\xi = \frac{N-1}{N} (\log \frac{Re}{r})^{-\frac{1}{N}} \frac{v(s(r))}{r}$, $\eta = (\log \frac{Re}{r})^{\frac{N-1}{N}} v'(s(r))s'(r)$ として適応すると,

$$\begin{aligned}
I &\geq -\omega_N N \left(\frac{N-1}{N} \right)^{N-1} \int_0^R v(s(r))^{N-1} v'(s(r)) s'(r) dr \\
&\quad + \omega_N \int_0^R |v'(s(r))|^N (s'(r))^N \left(r \log \frac{Re}{r} \right)^{N-1} dr \\
&= -\omega_N N \left(\frac{N-1}{N} \right)^{N-1} \int_0^1 v(s)^{N-1} v'(s) ds + \omega_N \int_0^1 |v'(s)|^N s^{N-1} ds \\
&= \omega_N \int_0^1 |v'(s)|^N s^{N-1} ds
\end{aligned} \tag{8}$$

となる. 一方で任意の $0 \leq s \leq 1$ に対して,

$$\begin{aligned}
|v(s)| &= \left| \int_s^1 v'(t) dt \right| = \left| \int_s^1 v'(t) t^{\frac{N-1}{N} - \frac{N-1}{N}} dt \right| \\
&\leq \left(\int_0^1 |v'|^N t^{N-1} dt \right)^{\frac{1}{N}} \left(\log \frac{1}{s} \right)^{\frac{N-1}{N}} \quad (\text{H\"older inequality より従う})
\end{aligned}$$

が成立するので,

$$\int_0^1 |v(s)|^q s^L ds \leq \left(\int_0^1 |v'(s)|^N s^{N-1} ds \right)^{\frac{q}{N}} \int_0^1 s^L \left(\log \frac{1}{s} \right)^{\frac{N-1}{N} q} ds$$

となり, 以下の評価を得る.

$$C(L, N, q)^{\frac{N}{q}} \left(\int_0^1 |v(s)|^q s^L ds \right)^{\frac{q}{N}} \leq \int_0^1 |v'(s)|^N s^{N-1} ds. \tag{9}$$

したがって, (8) と (9) より,

$$\begin{aligned}
I &\geq \omega_N C(L, N, q)^{\frac{N}{q}} \left(\int_0^1 |v(s)|^q s^L ds \right)^{\frac{q}{N}} \\
&= \omega_N C(L, N, q)^{\frac{N}{q}} \left(\int_0^R \frac{|u(r)|^q}{r \left(\log \frac{Re}{r} \right)^\alpha} dr \right)^{\frac{q}{N}} \\
&= \omega_N^{1-\frac{N}{q}} C(L, N, q)^{\frac{N}{q}} \left(\int_{B_R(0)} \frac{|u(x)|^q}{|x|^N \left(\log \frac{Re}{|x|} \right)^\alpha} dx \right)^{\frac{q}{N}}
\end{aligned}$$

となり, 結論の不等式を得ることが出来る.

[Step 2] 稠密性の議論 ([8] を参照) と球対称再配列関数の議論 (Pólya-Szegő の不等式と Riesz's rearrangement inequality を適用する) より, 一般の $W_0^{1,N}(\Omega)$ 関数に対しても結論の不等式 (5) が証明できる (本稿では割愛する). 以上より定理 1 が証明された.

4 今後の課題

実は本稿で扱った臨界 Hardy 不等式よりもより厳しい不等式であるシャープな臨界 Hardy 不等式

$$\left(\frac{N-1}{N} \right)^N \int_\Omega \frac{|u(x)|^N}{|x|^N \left(\log \frac{R}{|x|} \right)^N} dx \leq \int_\Omega |\nabla u(x)|^N dx \quad (\forall u \in W_0^{1,N}(\Omega), R := \sup_{x \in \Omega} |x|) \tag{10}$$

が成立することが知られている。このシャープな臨界 Hardy 不等式 (10) は (3) とは違い、ポテンシャル $(|x| \log \frac{R}{|x|})^{-N}$ は原点だけではなく、境界にも特異性をもっているという点が一つの大きな特徴であり、興味深い点である。近年, Ioku-Ishiwata[6] により, 領域 Ω がボールの場合に, 定数 $(\frac{N-1}{N})^N$ は最良であり, 達成されないことが証明された。したがって不等式 (10) にも剰余項の存在が期待できる。最近, Sano-Takahashi[11] により, (領域がボールの場合に) シャープな臨界 Hardy 不等式の剰余項が発見された。今後の課題としては, さまざまな一般有界領域 (円環領域や原点が境界上にある場合など) における臨界 Hardy 不等式 (10) の最良定数の値や達成可能性, 剰余項について明らかにし, それに関連する方程式への応用, また達成不可能となるメカニズムの解明 (最小化列の挙動の解析) などが挙げられる。

参考文献

- [1] Adimurthi, N.Chaudhuri, M.Ramaswamy, *An improved Hardy-Sobolev inequality and its application*, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), No. 2, 489-505 (electronic).
- [2] Adimurthi and K.Sandeep, *Existence and non-existence of the first eigenvalue of the perturbed Hardy-Sobolev operator*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **132** (2002), No.5, 1021-1043.
- [3] H.Brézis, J.L.Vázquez, *Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid 10 (1997), No. 2, 443-469.
- [4] N.Chaudhuri and M.Ramaswamy, *Existence of positive solutions of some semilinear elliptic equations with singular coefficients*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 131 (2001), No. 6, 1275-1295.
- [5] F.Gazzola, H.-C.Grunau and E.Mitidieri, *Hardy inequalities with optimal constants and remainder terms*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2003), No.6, 2149-2168.
- [6] N.Ioku and M.Ishiwata, *A scale invariant form of a critical Hardy inequality*, International Mathematics Research Notices, **212** (2014), 17 pages.
- [7] E.H.Lieb and M.Loss, *Analysis (2nd ed.)*, AMS, (2001).
- [8] 宮島静雄, ソボレフ空間の基礎と応用, 共立出版, (2006).
- [9] 小川卓克, 非線形発展方程式の実解析的方法, 丸善出版, (2013).
- [10] M.Sano and F.Takahashi, *Improved Hardy inequalities in a limiting case and their applications*, submitted.
- [11] M.Sano and F.Takahashi, *Scale invariance structures of the critical and the subcritical improved Hardy inequalities and their relationship*, submitted.
- [12] J.L.Vázquez and E.Zuazua, *The Hardy inequality and asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential*, J. Funct. Anal., **173** (2000), 103-153.