Eisenstein 級数の定数項と合同加群について

小澤 友美*

東北大学大学院理学研究科数学専攻，2015 年 2 月

この度は第 12 回城崎新人セミナーに参加して，有意義な時間を過ごすことができました．参加及び講演の機会を下さった運営委員の皆さんに，この場をお借りして感謝申し上げます．

本稿では合同加群の定義，基本的な例および L 関数の特殊値の研究への応用について，整数論以外を専門とする方にも大まかな雰囲気が伝わるような紹介を試みます．講演のアブストラクトには，総実代数体上定義される Eisenstein 級数の定数項の計算を紹介し，時間が許せばその計算の動機となった太田の合同加群の理論 ([Oh] 参照) を紹介すると書きました．しかし実際の講演ではほとんどの時間を合同加群の定義と例の紹介に費やし，Eisenstein 級数については最後に少し触れるのみとなりました．もともとご紹介する予定でした Eisenstein 級数の定数項の計算は，有理数体上定義される場合には論文 [Oh] で太田により計算されており，総実代数体の場合も特に新しい手法を導入することなく計算できます．講演者は定数項の計算そのものよりも，計算の動機となった背景にある数学のほうが話題として魅力的であると思い，講演の内容を変更しました．

なお，今回の講演及び本稿の執筆にあたり，論説 [H2] を大いに参考に致しました．

1　合同加群の定義と基本的な例

本節の内容は [H1] の第 1 節及び [Oh] の第 1 章第 1 節に基づいている．A を標数 0 の Noether 整域，R と B をそれぞれ A 加群で A 上有限生成かつ平坦なもの，$\lambda : R \to B$ を A 加群の全射準同型とする．定義から次の A 加群の列は完全である：

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\lambda) \longrightarrow R \xrightarrow{\lambda} B \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

K を A の商体とする．完全列 (1.1) を K 上に係数拡大して得られる列が完全かつ分裂すると仮定する：

$$0 \longleftarrow \mathrm{Ker}(\lambda) \otimes_A K \xleftarrow{t} R \otimes_A K \xleftarrow{s} B \otimes_A K \longleftarrow 0 \tag{1.2}$$

この仮定のもとで，次の写像の合成が考えられる：

$$\rho : R \longrightarrow R \otimes_A K \cong (\mathrm{Ker}(\lambda) \otimes_A K) \oplus (B \otimes_A K) \xrightarrow{t} \mathrm{Ker}(\lambda) \otimes_A K.$$

このとき写像 $\lambda \oplus \rho : R \to B \oplus \rho(R)$ は単射となることが確かめられる．

定義 1.1. $\mathrm{Coker}(\lambda \oplus \rho)$ を，完全列 (1.1) とその商体上の分裂 (1.2) の組に対する合同加群という．

合同加群は完全列 (1.1) のみならず，その商体上の分裂 (1.2) の取り方にも依存する．そのことを次に紹介する例で確認してほしい．

*sb2m06@math.tohoku.ac.jp

例 1.2. 次の $\mathbb{Z}$ 加群の完全列を考える：

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\lambda} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{1.3}$$

ここで $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$ は $\iota(x) = (2x, -x)$, $\lambda : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ は $\lambda(x, y) = x + 2y$ でそれぞれ定義される．$i = 1, 2, 3$ に対し，完全列 (1.3) の $\mathbb{Q}$ 上の分裂 $(1.4)_i$

$$0 \longleftarrow \mathbb{Q} \xleftarrow{t_i} \mathbb{Q}^2 \xleftarrow{s_i} \mathbb{Q} \longleftarrow 0$$

を与え，完全列 (1.3) と分裂 $(1.4)_i$ の組に対する合同加群を $\mathcal{C}_i$ と表す．次がその一覧である：

$$\begin{aligned}
&s_1(x) = (x, 0), && t_1(x, y) = -y, && \mathcal{C}_1 = \{0\}\,;\\
&s_2(x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{x}{4}\right), && t_2(x, y) = \frac{x - 2y}{4}, && \mathcal{C}_2 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z};\\
&s_3(x) = \left(\frac{x}{9}, \frac{4x}{9}\right), && t_3(x, y) = \frac{4x - y}{9}, && \mathcal{C}_3 = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

2 L 関数と合同加群：初歩的な例を通して

前節で見たように，合同加群は環論的操作で定義される対象である．本節では合同加群と数論，特に L 関数とを結び付けたい．L 関数にはさまざまなものがあるが，ここではなるべく話を簡潔にするため代数体の Dedekind ゼータ関数を考える．F を $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体 (このような体を代数体と呼ぶ), O_F を F の元で整数係数モニック多項式の根であるもの全体の集合 (この集合は F の加法と乗法について環となり，F の整数環と呼ばれる), I を F から $\mathbb{C}$ への体準同型全体の集合とする．I の元の個数は $F/\mathbb{Q}$ の拡大次数に一致する．また，I は次のように表される：

$$I = \{\tau_0, \ldots, \tau_{r_1-1},\ \tau_{r_1}, \ldots, \tau_{r_1+r_2-1},\ c \circ \tau_{r_1}, \ldots, c \circ \tau_{r_1+r_2-1}\}.$$

ここで r_1, r_2 は 0 以上の整数で，整数 $0 \le i \le r_1 - 1$ について $\tau_i(F)$ は実数体 $\mathbb{R}$ に含まれ，$r_1 \le i \le r_1 + r_2 - 1$ について $\tau_i(F)$ は $\mathbb{R}$ に含まれない．c は $\mathbb{C}$ 上の複素共役を表す．$\tau \in I$ による $\alpha \in F$ の像を α^τ で表す．$F_+ = \{\alpha \in F \mid \alpha^{\tau_i} > 0,\ \forall i = 0, \ldots, r_1 - 1\}$ とする．$I_F(O_F)$ を F の分数イデアル全体のなす乗法群とし，その部分群を $P_F^+(O_F) = \{\alpha O_F \mid \alpha \in F_+\}$ で定める．商群 $\mathrm{Cl}_F^+ = I_F(O_F)/P_F^+(O_F)$ を F の狭義イデアル類群といい，有限群であることが知られている．

F の Dedekind ゼータ関数 $\zeta_F(s)$ は複素関数で，$\mathrm{Re}(s) > 1$ の範囲では無限級数

$$\zeta_F(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^{-s}$$

で定義される．ただし右辺の和で $\mathfrak{a}$ は 0 でない O_F のイデアルをすべて亙り，$\mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})$ は剰余環 $O_F/\mathfrak{a}$ の位数である (0 でない $\mathfrak{a}$ に対しこの位数は常に有限となる)．F が有理数体のとき $\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$ は Riemann ゼータ関数に一致する．$\zeta_F(s)$ は全平面 $\mathbb{C}$ で定義される有理型関数に解析接続され，$s = 1$ で 1 位の極を持つことが知られている．$\zeta_F(s)$ の $s = 1$ での留数は以下のように記述される：

定理 2.1 (類数公式，[Mi] Theorem 3.3.1)**.** w を F に含まれる 1 のべき根の総数，D を $F/\mathbb{Q}$ の判別式，$O_F^\times$ を O_F の単数群，$E = O_F^\times \cap F_+$, R を E の単数基準とする (これは 0 でない実数)．$U_\infty = 2^{r_1}(2\pi)^{r_2}|R|/w\sqrt{|D|}$ とおく．$|\mathrm{Cl}_F^+|$ で Cl_F^+ の位数を表す．このとき次の等式が成り立つ：

$$\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_F(s) = |\mathrm{Cl}_F^+| \cdot U_\infty. \tag{2.1}$$

一旦合同加群の話に戻ろう．A, K は前節と同じものを指す．$A^\times$ を A の乗法に関する可逆元全体のなす乗法群とする．有限群 G と群準同型 $\lambda : G \to A^\times$ が与えられたとする．λ を G の A 上の群環 $A[G] = \oplus_{\sigma\in G} A\sigma$ に，対応 $\sum_{\sigma\in G} a_\sigma \sigma \mapsto \sum_{\sigma\in G} a_\sigma \lambda(\sigma)$ ($a_\sigma \in A$) により延長することができる．この延長を $\lambda_a : A[G] \to A$ と書く．λ_a は定義から全射である．A 加群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\lambda_a) \longrightarrow A[G] \xrightarrow{\lambda_a} A \longrightarrow 0. \tag{2.2}$$

の商体上の分裂 $s : K \to K[G]$ を $s(1) = \frac{1}{\#G}\sum_{\sigma\in G} \lambda(\sigma)^{-1}\sigma$ で定める．すると完全列 (2.2) と分裂 s の組に対する合同加群 は $A/|G|A$ となる．特に $G = \mathrm{Cl}_F^+$ で $\lambda : \mathrm{Cl}_F^+ \to \mathbb{C}^\times$ が群準同型のとき，λ の値を含むような代数体 K の整数環 A について，上の合同加群は $A/|\mathrm{Cl}_F^+|A$ となる．

注意 2.2. 専門家向けに注意すると，$A[\mathrm{Cl}_F^+]$ は F 上の GL_1 の保型形式のレベル O_F の Hecke 環に同型であり，A 代数の準同型 $\lambda_a : A[\mathrm{Cl}_F^+] \to A$ を与えることはレベル O_F の保型形式で Hecke 指標であるものを与えることに相当する．詳細は [H1] の第 2 節を参照せよ．

以上の話をやや強引にまとめると，保型形式に関連する文脈で合同加群を考えると，そこに Dedekind ゼータ関数の留数に関する情報が現れるという現象を観察したことになる．

3 モジュラー形式，合同加群と L 関数の特殊値

3.1 楕円モジュラー形式

楕円モジュラー形式と L 関数に関する基本事項は例えば [Mi] にあるので，必要に応じて参照してほしい．$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を複素上半平面，$SL_2(\mathbb{Z})$ を整数係数の 2 次正方行列で行列式が 1 であるもの全体のなす群とする．$SL_2(\mathbb{Z})$ は上半平面 $\mathfrak{H}$ に 1 次分数変換で作用する：

$$\gamma z = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{for} \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \quad \text{and} \quad z \in \mathfrak{H}.$$

関数 $f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$, 行列 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$, 整数 k に対し，$\mathfrak{H}$ 上の関数 $f|_k\gamma$ を次で定める：

$$(f|_k\gamma)(z) = f(\gamma z)(cz+d)^{-k} \quad (z \in \mathfrak{H}).$$

正の整数 N に対し $\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \middle| a \equiv d \equiv 1 \bmod N,\ c \equiv 0 \bmod N \right\}$ とおく．

定義 3.1. k を非負整数，N を 1 以上の整数とする．f が重さ k, レベル N の楕円モジュラー形式 (resp. 楕円尖点形式) であるとは，f が次の条件を満たすことをいう：

(3.1a) f は $\mathfrak{H}$ 上の複素数値正則関数；

(3.1b) 任意の $\gamma \in \Gamma_1(N)$ に対し $f|_k\gamma = f$;

(3.1c) f は各尖点の近傍で有界 (resp. 急減少).

条件 (3.1c) について詳しく述べる．任意の $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して $\gamma \left(\begin{smallmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \gamma^{-1} \in \Gamma_1(N)$ であることに注意すると，条件 (3.1b) より各 $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して $(f|_k\gamma)(z+N) = (f|_k\gamma)(z)$ が成り立つ．よって $(f|_k\gamma)(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a\left(\frac{n}{N}, f|_k\gamma\right) q^{\frac{n}{N}}$ と Fourier 展開される．ただし $q = \exp(2\pi i z)$ とおいた．このとき f が各尖点の近傍で有界 (resp. 急減少) とは，任意の $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ と任意の整数 $n < 0$ (resp. $n \leq 0$) に対し $a\left(\frac{n}{N}, f|_k\gamma\right) = 0$ が成り立つことである．

重さ k, レベル N の楕円モジュラー形式 (resp. 楕円尖点形式) のなす複素ベクトル空間を $M_k(N)$ (resp. $S_k(N)$) と書く．任意の k と N に対し $M_k(N)$ は有限次元複素ベクトル空間である．

3.2 Eisenstein 級数

定義から $S_k(N)$ は $M_k(N)$ の部分空間であるが，尖点形式でないモジュラー形式で特に重要なのが Eisenstein 級数である．簡単のため重さ k は 2 以上とする．η, ψ をそれぞれ導手が u, v である Dirichlet 指標で，$(\eta\psi)(-1) = (-1)^k$ を満たすとする．$k = 2$ のときは更に η と ψ の少なくとも一方は非自明な指標であると仮定する．$N = uv$ とおく．指標の組 (η, ψ) に付随する重さ k の Eisenstein 級数 $E_k(\eta, \psi)$ は

$$E_k(\eta,\psi)(z) = \frac{v^k(k-1)!}{2(2\pi i)^k\tau(\psi^{-1})}\sum_{a_1=1}^{u}\sum_{a_2=1}^{N}\eta(a_1)\psi^{-1}(a_2)\lim_{s\to 0}G_k(z,s,a_1v,a_2,N) \tag{3.1}$$

で定義される．ここで整数 a_1, a_2, 複素変数 s に対し

$$G_k(z,s,a_1,a_2,N) = \sum_{\substack{(a,b)\in\mathbb{Z}^2,\ (a,b)\neq(0,0),\\ a\equiv a_1 \bmod N,\ b\equiv a_2 \bmod N}} \frac{1}{(az+b)^k|az+b|^{2s}},$$

$$\tau(\psi^{-1}) = \sum_{j=1}^{v}\psi^{-1}(j)\exp\left(2\pi i\frac{j}{v}\right)$$

である．上の無限和は $\mathrm{Re}(k+2s) > 2$ で絶対収束し，$G_k(z,s,a_1,a_2,N)$ は s について全平面 $\mathbb{C}$ で定義される有理型関数に解析接続され，$s = 0$ で正則であることが知られている ($k \geq 3$ のときは上の無限和で $s = 0$ としたものが絶対収束し $\lim_{s\to 0}G_k(z,s,a_1,a_2,N)$ に一致する)．$E_k(\eta,\psi)$ は重さ k, レベル N の楕円モジュラー形式になっている．(3.1) 式の右辺を Fourier 展開すると

$$E_k(\eta,\psi)(z) = \delta_{\eta,1}2^{-1}L(\psi,1-k) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{0<d|n}\eta\left(\frac{n}{d}\right)\psi(d)d^{k-1}\right)q^n$$

となる．ここで $\delta_{\eta,1}$ は η が自明な指標のとき 1, それ以外は 0 で，$L(\psi,s)$ は ψ に付随する Dirichlet L 関数である．右辺の和で d は n の正の約数を全て亘る．太田は [Oh] で各 $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して $E_k(\eta,\psi)|_k\gamma$ の Fourier 展開の定数項の値を求めた：

命題 3.2 ([Oh] Proposition 2.5.5)**.** $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対し，$a(0, E_k(\eta,\psi)|_k\gamma)$ の値は c が v の倍数でないとき 0 で，c が v の倍数のときは以下に一致する：

$$2^{-1}\frac{\tau(\eta\psi^{-1})}{\tau(\psi^{-1})}\eta\left(-\frac{c}{v}\right)\psi^{-1}(a)\left(\frac{v}{\mathrm{cond}(\eta\psi^{-1})}\right)^k\prod_{\substack{l|N,\\ l\nmid\mathrm{cond}(\eta\psi^{-1})}}(1-(\eta\psi^{-1})(l)l^{-k})L(\eta^{-1}\psi,1-k).$$

ここで $\mathrm{cond}(\eta\psi^{-1})$ は $\eta\psi^{-1}$ の導手で，積の l は N を割り $\mathrm{cond}(\eta\psi^{-1})$ を割らない素数を亘る．

注意 3.3. 楕円モジュラー形式の一つの一般化として Hilbert モジュラー形式がある．志村は Eisenstein 級数 $E_k(\eta,\psi)$ を Hilbert モジュラー形式の場合に一般化した ([Sh] 第 3 節参照)．講演者はこの Hilbert Eisenstein 級数の定数項を命題 3.2 に倣って計算した (arXiv:1410.7440 に論文がある)．

3.3 Eisenstein 級数，合同加群と L 関数の特殊値

この節では簡単のためレベル N は 1, 重さ k は 4 以上の偶数とする．5 以上の素数 p を $k \not\equiv 0 \bmod (p-1)$ となるように取る．$\mathbb{Z}$ を p 進距離で完備化して得られる整域を $\mathbb{Z}_p$, その商体を

$\mathbb{Q}_p$ とする．$\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{Q}_p$) の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ (resp. $\overline{\mathbb{Q}}_p$) と体準同型 $\overline{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ をそれぞれ固定する．このとき次の平坦 $\mathbb{Z}_p$ 加群の完全列がある：

$$0 \longrightarrow S_k(1,\mathbb{Z}_p) \longrightarrow M_k(1,\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\lambda} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0. \tag{3.2}$$

ただし $M_k(1,\mathbb{Z}_p) = M_k(1,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$, $M_k(1,\mathbb{Z}) = \{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n,f)q^n \mid a(n,f) \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0\}$ で，$S_k(1,\mathbb{Z}_p)$ も同様に定義する．λ は $\lambda(f) = a(0,f)$ で与えられる．前節で定義した Eisenstein 級数 $E_k(1,1)$ を単に E_k と書く．E_k は

$$E_k(z) = 2^{-1}\zeta_{\mathbb{Q}}(1-k) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{0<d|n} d^{k-1}\right)q^n$$

と Fourier 展開される．k と p に関する仮定から $\zeta_{\mathbb{Q}}(1-k)$ は 0 でない $\mathbb{Z}_p$ の元なので，E_k は $M_k(1,\mathbb{Z}_p)$ に属する．(3.2) の $\mathbb{Q}_p$ 上の分裂 $s : \mathbb{Q}_p \to M_k(1,\mathbb{Q}_p)$ を $s(1) = 2\zeta_{\mathbb{Q}}(1-k)^{-1}E_k$ で与えると，完全列 (3.2) と分裂 s の組に付随する合同加群は $\mathbb{Z}_p/\zeta_{\mathbb{Q}}(1-k)\mathbb{Z}_p$ となる．よってこの合同加群の位数を知ることは $\zeta_{\mathbb{Q}}(1-k)$ の分子が p で何回割れるかを知ることと同等である．太田は [Oh] においてより一般の設定でこのようにモジュラー形式に伴う短完全列と分裂を考え，それに付随する合同加群が命題 3.2 で求めた Eisenstein 級数の定数項を用いて計算できることを示した．

3.4 合同加群の周辺の研究と今後の展望

数論において L 関数の特殊値の研究は重要だが，今回のように敢えて合同加群を用いて間接的に L 関数の特殊値を捉えることに意味はあるのだろうか．合同加群の理論については太田自身が [Oh] で，有理数体上の岩澤主予想を見通し良く再証明するのに応用しているほか，[H3] など岩澤理論におけるいくつかの重要な論文で用いられている．既に見たように，上のような合同加群を考えるにはモジュラー形式の空間の構造に関する情報が必要となる．L 関数の特殊値を Eisenstein 級数というモジュラー形式の定数項と思うことにより，合同加群という L 関数の特殊値よりも多くの情報を含むと思われる対象が定義でき，L 関数の特殊値の研究に新たな道が開ける——合同加群を応用している研究の背景にはそのような考え方があるように思えてならない．Hilbert モジュラー形式についても同様の研究ができれば総実代数体の岩澤理論の進展につながるだろう．

参考文献

[H1] Hida, H., *Hecke algebras for GL_1 and GL_2*, Séminaire de théorie des nombres, Paris 1984–85, 131–163, Progr. Math. 63, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1986.

[H2] Hida, H., *Galois representations and the theory of p-adic Hecke algebras*, (Japanese) Sugaku Expositions 2 (1989), no. 1, 75–102. Sūgaku 39 (1987), no. 2, 124–139.

[H3] Hida, H., *Image of Λ-adic Galois representations modulo p*, Invent. Math. 194 (2013), no. 1, 1–40.

[Mi] Miyake, T., *Modular forms*, Translated from the 1976 Japanese original by Yoshitaka Maeda. Reprint of the first 1989 English edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Oh] Ohta, M., *Congruence modules related to Eisenstein series*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 36 (2003), no. 2, 225–269.

[Sh] Shimura. G., *The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms*, Duke Math. J. 45 (1978), no. 3, 637–679.