p 進数の分類について

大音智弘 *

筑波大学 数理物質科学研究科数学専攻，2015 年 2 月

概 要

本稿では，p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ を 4 つのクラス (A-, S-, T-, U-number) に分類し，与えられた p 進数がどのクラスに属するかについて考える．特に， automatic とよばれる digit が automaton から生成される p 進数は有理数, S-, T-number のいずれかになることを示した．

1 はじめに

数の超越性や代数的独立性を調べるのに，その数が代数的数でどのくらい良く”近似”できるかを計算するのは有効な手段である．その一例として以下の定理が知られている．

Theorem 1.1 (Liouville, 1844)**.** $\xi \in \mathbb{R}$ とおく．任意の整数 $n \geq 1$ に対して，

$$0 < \left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{|q|^n}$$

となる $p/q \in \mathbb{Q}$ $(q > 1)$ が存在するならば，実数 ξ は超越数．

Theorem 1.1 は先ほどの言い方で，いくらでも良く有理数で近似できる実数は超越数ということを意味している．Liouville は Theorem 1.1 から実数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/10^{n!}$ が超越数であることを示した．本稿は，このような近似の考え方から p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ を A-, S-, T-, U-number の 4 つのクラスに分類し，そのクラスについて知られている性質や，具体的な数がどのクラスに属するかについて得られた結果を報告する．

2 p 進数の分類

はじめに多項式と代数的数の高さを定義する．整数係数多項式 $P(X) = \sum_{n=0}^{d} a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$ に対して，$H(P) := \max_{0 \leq n \leq d}\{|a_n|\}$ を多項式 P の高さという．p 進数 $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ を $\mathbb{Q}$ 上代数的数 (以下，単に代数的数とよぶ) とする．整数係数多項式 $P(X) = \sum_{n=0}^{d} a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$ は，原始的な既約多項式で $P(\alpha) = 0, a_d > 0$ を満たすとき，α の最小多項式という．このとき，$H(\xi) := H(P)$ を α の高さといい，$\deg \alpha := \deg P$ を α の次数という．

次に，p 進数が多項式や代数的数でどのくらい良く近似できるかを以下のようにして定式化する．

*ooto@math.tsukuba.ac.jp

Definition 2.1. 整数 $n \geq 1$，p 進数 $\xi \in \mathbb{Q}_p$ に対して，

$$w_n(\xi) := \sup\left\{ w \in \mathbb{R} \middle| 0 < |P(\xi)|_p < H(P)^{-w-1} \text{ for infinitely many } P(X) \in \mathbb{Z}[X] \text{ with } \deg P \leq n \right\}$$
$$w_n^*(\xi) := \sup\left\{ w \in \mathbb{R} \middle| 0 < |\xi - \alpha|_p < H(\alpha)^{-w-1} \text{ for infinitely many } \alpha \in \mathbb{Q}_p \text{ with } \deg \alpha \leq n \right\}$$
$$w(\xi) := \limsup_{n\to\infty} \frac{w_n(\xi)}{n}, \quad w^*(\xi) := \limsup_{n\to\infty} \frac{w_n^*(\xi)}{n}.$$

Mahler は，関数 w_n, w を用いて p 進数を以下の 4 つのクラスに分類した．

Definition 2.2 (Mahler [7])**.** p 進数 $\xi \in \mathbb{Q}_p$ は，

$$A\text{-number } (w(\xi) = 0 \text{ のとき}),$$
$$S\text{-number } (0 < w(\xi) < \infty \text{ のとき}),$$
$$T\text{-number } (w(\xi) = \infty \text{ かつ任意の整数 } n \geq 1 \text{ に対して，} \quad w_n(\xi) < \infty \text{ のとき}),$$
$$U\text{-number } (w(\xi) = \infty \text{ かつある整数 } n \geq 1 \text{ に対して，} \quad w_n(\xi) = \infty \text{ のとき})$$

とよばれる．

また，関数 w_n^*, w^* を用いて A^*, S^*, T^*, U^*-number を同様に定めることができる．この分類の性質として以下のことが知られている．

Proposition 2.3. *p 進数 $\xi \in \mathbb{Q}_p$ に対して，ξ が A-number (resp. S-,T-,U-number) であることは A^*-number (resp. S^*-,T^*-,U^*-number) であることの必要十分条件となる．また，p 進数 $\xi, \eta \in \mathbb{Q}_p$ が $\mathbb{Q}$ 上代数的従属ならば，ξ, η は同じクラスに属する．特に，A-number 全体は代数的数全体と一致する．*

Proposition 2.3 により， Mahler による分類は $\mathbb{Q}_p$ を代数的数と超越数の 2 つに分けるより細かく分類していることがわかった．細かく分類しても空集合では意味が無いが，A-,S-,T-,U-number 全体はそれぞれ空集合でないことが知られている．中でも T-number の存在性には，部分空間定理という主結果の証明でも用いられた強力な道具が用いられている．また，ハール測度に関してほとんどすべての p 進数は S-number であることが知られている．

関数 w_n, w_n^* の値については次のことが知られている．

Proposition 2.4. *p 進数 $\xi \in \mathbb{Q}_p$，整数 $n \geq 1$ に対して，以下が成立する．*

(1) ξ が d 次の代数的数ならば，$w_n(\xi) = w_n^*(\xi) = \min\{d-1, n\}$

(2) ξ が超越数ならば，$w_n(\xi) \geq n, \quad w_n^*(\xi) \geq (n+1)/2$

(3) $0 \leq w_n(\xi) - w_n^*(\xi) \leq n - 1$

実数に対しても，整数係数多項式や代数的数での近似の考え方から A-, S-, T-, U-number が定義できる．そして， Proposition 2.3, 2.4 の類似も成り立つ．さらに，有限体上のローラン級数体 $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ 上にも同じように A-, S-, T-, U-number が定義できるが，Proposition 2.4 (1) の類似が成立しないなどいくつか標数 0 と異なった現象が起きる．これらの分類のことは，[5, Section 3,4,7,9] にまとめて書いてある．

3 Automatic 数

この節では，本稿で扱う automatic 数について例を交えて紹介する．

Definition 3.1. $k \geq 2$ を整数とする．以下の 6 つ組を k-automaton という：

$$A = (Q, \Sigma_k, \delta, q_0, \Delta, \tau).$$

ただし，Q は有限集合，$\Sigma_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$，$\delta : Q \times \Sigma_k \to Q$ は写像，$q_0 \in Q$，Δ は集合，$\tau : Q \to \Delta$ は写像.

有限語 $X = x_1 x_2 \ldots x_n$ $(x_i \in \Sigma_k)$, $q \in Q$ に対して，$\delta(q, X) = \delta(\delta(q, x_1 x_2 \ldots x_{n-1}), x_n)$ で帰納的に $\delta(q, X)$ を定める．整数 $n \geq 1$ に対して，n の k 進展開を $\sum_{i=0}^{r} w_i k^i$ とかき，$W_n = w_0 w_1 \ldots w_r$ とおく．ただし，$W_0 := 0$ とおく．

Definition 3.2. p 進数 $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \in \mathbb{Q}_p$ は，整数 $k \geq 2$ と $k-$automaton $A = (Q, \Sigma_k, \delta, q_0, \Delta, \tau)$ が存在して，すべての整数 $n \geq 0$ に対して $a_n = \tau(\delta(q_0, W_n))$ となるとき automatic 数という．

automatic 数には，同値な条件がいくつか存在し [4, Section 5,6,12] などに詳しく書いてある．

Example. p 進数 $\xi := \sum_{n=0}^{\infty} p^{2^n} \in \mathbb{Q}_p$ は automatic 数．実際，$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$ とおくと以下が成り立つ．

$$a_n = \begin{cases} 1 & (\text{整数 } k \geq 0 \text{ が存在して，} \quad n = 2^k) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

p 進数 ξ は 2-automaton $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma_2, \delta, q_0, \{0, 1\}, \tau)$ によって生成される．ただし，$\delta(q_0, 0) = q_0, \delta(q_0, 1) = q_1, \delta(q_1, j) = \delta(q_2, j) = q_2$ $(j = 0, 1)$, $\tau(q_0) = \tau(q_2) = 0, \tau(q_1) = 1$.

4 主結果

automatic 数に関して次の結果が知られている．

Theorem 4.1 (Adamczewski-Bugeaud [1])**.** *p 進数 $\xi \in \mathbb{Q}_p$ を automatic 数とする．このとき，ξ は有理数か超越数のいずれかになる．*

Theorem 4.1 を拡張し，以下の結果を得ることができた．

Theorem 4.2. *p 進数 $\xi \in \mathbb{Q}_p$ を automatic 数とする．このとき，ξ は有理数，S-,T-number のいずれかになる．*

この定理の証明で必要なのは，p 進数 ξ を良く近似する有理数列を構成することなので automatic 数より広い範囲に拡張できる．その拡張を述べるのに，数列の複雑度及び Diophantine exponent を導入する．数列 $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 0}$ と整数 $m \geq 1$ に対して，

$$p_{\mathbf{a}}(m) = \mathrm{Card}\{a_i a_{i+1} \ldots a_{i+m-1} \mid i \geq 0\}$$

を $\mathbf{a}$ の複雑度関数とよぶ．

$\mathcal{A}$ を集合とする．$\mathcal{A}$ 上の語 W の長さ (*i.e.* W の文字数) を $|W|$ とかく．整数 $n \geq 1$ に対して，W を n 回繰り返したものを W^n とかき，実数 $x > 0$ に対して、$W^x := W^{\lfloor x \rfloor} W'$ と定める．ただし，W' は W の長さ $\lceil (x - \lfloor x \rfloor)|W| \rceil$ の接頭語とする．

数列 $\mathbf{a}$ の Diophantine exponent を次を満たす実数 ρ の上限とし，$\mathrm{Dio}(\mathbf{a})$ で表す: 有限語の数列 $(U_n)_{n\geq 1}, (V_n)_{n \geq 1}$ と正の実数列 $(w_n)_{n\geq 1}$ が存在して，

(a) 任意の整数 $n \geq 1$ に対して，語 $U_n V_n^{w_n}$ は $\mathbf{a}$ の接頭語

(b) 任意の整数 $n \geq 1$ に対して，$|U_n V_n^{w_n}| \geq \rho |U_n V_n|$

(c) 数列 $(|V_n^{w_n}|)_{n \geq 1}$ は狭義単調増加

を満たす．

p 進数 $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \in \mathbb{Q}_p$ に対して，$\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ とおく．このとき，ξ の複雑度関数，Diophantine exponent をそれぞれ $p_\xi(m) := p_{\mathbf{a}}(m), \mathrm{Dio}(\xi) := \mathrm{Dio}(\mathbf{a})$ で定める．

このとき，次の結果が得られた．

Theorem 4.3. *p 進数 $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \in \mathbb{Q}_p$ が以下を満たすとする:*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{p_\xi(n)}{n}, \quad \mathrm{Dio}(\xi) < \infty.$$

このとき，p 進数 ξ は S-, T-number のどちらかになる．

Remark. Theorem 4.3 は，[2, Théorème 1.1] の p 進類似となっている．また，p 進数 $\xi \in \mathbb{Q}_p \backslash \mathbb{Q}$ が automatic 数だとすると，Theorem 4.3 の仮定を満たす．この結果により， automatic 数の他にも primitive morphic 数や Sturm 数などのよく知られた数に対しても S-, T-number のどちらかになることがわかった．

最後に， Theorem 4.3 の証明の概略を述べる．証明は，以下の 2 ステップで行われる:

1. $w_1(\xi)$ の有限性

2. 任意の $n \geq 2$ に対して，$w_n(\xi)$ の有限性．

2. の証明には部分空間定理という強力な道具を用いる．紙面の都合上 1. の証明の概略だけ述べる．

$\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ とおく．十分大きい n に対して，$p_\xi(n) = O(n)$ が成立することから鳩ノ巣論法を用いると次のことがわかる．有限語の数列 $(U_n)_{n\geq 1}, (V_n)_{n\geq 1}$ と正の実数列 $(w_n)_{n\geq 1}$ が存在して，

(i) 任意の整数 $n \geq 1$ に対して，語 $U_n V_n^{w_n}$ は $\mathbf{a}$ の接頭語

(ii) ある $A > 1$ が存在して，任意の整数 $n \geq 1$ に対して，$|U_n V_n^{w_n}| \geq A |U_n V_n|$

(iii) 数列 $(|V_n^{w_n}|)_{n\geq 1}$ は狭義単調増加

(iv) $|U_n|, |V_n|$ に関する不等式をいくつか満たす．

ここで digit が $U_n V_n V_n \ldots$ となる p 進数を $\xi_n \in \mathbb{Q}_p$ とし，$\eta_n = p^{|U_n V_n|}$ とおく．digit が周期的なので，ξ_n は有理数となる．$\mathrm{Dio}(\xi)$ の定義より，正の実数 $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\eta_n^{-\mathrm{Dio}(\xi) - \varepsilon} \leq |\xi - \xi_n|_p \leq \eta_n^{-A}, \quad H(\xi_n) \leq \eta_n.$$

また (iv) を用いることで，ある定数 $B \geq 1$ と部分列 $(\eta_{n_i})_{i\geq 0}$ が存在して $\eta_{n_i} < \eta_{n_{i+1}} \ll \eta_{n_i}^B$ となる．ここで，次の Lemma を使うことで $w_1(\xi)$ の上界を得る．この Lemma の証明は非常に初等的であるが，$w_1(\xi)$ の上界を得る手段としては非常に強力である．$\mathbb{R}$ 版や $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ 版も存在し，その証明はそれぞれ [3, 6] などに書いてある．

Lemma 4.4. ξ を p 進数とし，$c_0 > 0, \theta \geq 1$ を実数とする．正整数の数列 $(\beta_n)_{n\geq 1}$ が任意の整数 $n \geq 1$ に対して，$\beta_n < \beta_{n+1} \leq c_0\beta_n^\theta$ を満たすとする．有理数の数列 $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ と実数 $\delta, \rho, c_1, c_2, c_3 > 0$ が存在して，任意の整数 $n \geq 1$ に対して以下を満たすとする*:*

$$c_1\beta_n^{-1-\rho} \leq |\xi - \alpha_n|_p \leq c_2\beta_n^{-1-\delta}, \quad H(\alpha_n) \leq c_3\beta_n.$$

このとき，次が成り立つ*:*

$$w_1(\xi) \leq (1+\rho)\theta/\delta - 1.$$

参考文献

[1] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, *On the complexity of algebraic numbers I. Expansions in integer bases*, Ann. of Math. 165 (2007), 547-565.

[2] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, *Nombres réels de complexité sous-linéaire: mesures d'irrationalité et de transcendance*, J. Reine Angew. Math. 658 (2011), 65-98.

[3] B. Adamczewski, T. Rivoal, *Irrationality measures for some automatic real numbers*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 147 (2009), 659-678.

[4] J.-P. Allouche, J. Shallit, *Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations*, Cambridge University Press, Cambridge (2003).

[5] Y. Bugeaud, *Approximation by algebraic numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics 160, Cambridge (2004).

[6] A. Firicel, *Rational approximations to algebraic Laurent series with coefficients in a finite field*, Acta Arith. 157 (2013), no. 4, 297-322.

[7] K. Mahler, *Über eine Klasseneinteilung der p-adischen Zahlen*, Mathematica Leiden 3 (1934/35), 177-185.