Derived categories and generalized complexes

小川 泰朗 *

名古屋大学大学院　多元数理科学研究科，2015 年 2 月

概 要

複体とは 2-微分を有する次数付き対象のことで，数学の幅広い分野で応用されている．“ 2-微分 ”であることはどれほど本質的なのだろうか？ 本稿ではこの問に対する１つの解答を与える．即ち，反復代数 (repetitive algebra) を通じて構成される一般化された複体についても“ 良い ”ホモロジー群や導来圏が定義できることを示し，これらと通常の導来圏との関係について述べる．

1　2-複体の導来圏

単位元を有する結合的な環 R に対して，その導来圏 $\mathsf{D}(R)$ とは，環 R のホモロジー代数的構造を調べる際の良い枠組みとして Grothendieck のアイデアに基づき導入されたものである．本節ではこの導来圏の構成について述べる．

本稿では簡単のため，環 R として体 k 上の有限次元代数のみを扱うものとする．右 R 加群の圏 $\mathrm{Mod}R$ における **(鎖) 複体** $X^\bullet$ とは，R 加群と R 準同型の列

$$X^\bullet = (\cdots \to X^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} X^i \xrightarrow{d^i} X^{i+1} \to \cdots)$$

で，全ての $i \in \mathbb{Z}$ について $d^{i+1}d^i = 0$ を満たすものを言う．複体 $X^\bullet$ の第 i 次の項を $(X^\bullet)^i = X^i$ と表すことにする．各 d^i を複体 $X^\bullet$ の微分というが，２つ合成すると 0 になることから，本稿ではしばしば 2-**微分**と呼ぶことにする．合わせて複体のことも 2-**複体**と呼ぶ．2-複体及びそれらの間の射 (chain map) からなる圏を 2-**複体の圏**と言い $\mathsf{C}(R)$ で表す．この 2-複体の圏 $\mathsf{C}(R)$ は懸垂と呼ばれる重要な関手を持つ．

定義 1.1. 2-複体 $X^\bullet$ に対して 2-複体 $\Sigma X^\bullet$ を，

$$(\Sigma X^\bullet)^i := (X^\bullet)^{i+1},\ d^i_{\Sigma X} := -d^i_X$$

で定義することで，自己同型関手 $\Sigma : \mathsf{C}(R) \to \mathsf{C}(R)$ を得る．これを**懸垂**と言う．

懸垂とは，与えられた 2-複体を左に１つずらす操作のことである．逆に，右にずらす操作 Σ^{-1} を考えることも出来，明らかに Σ と Σ^{-1} は互いに逆射になっている．

2-複体 $X^\bullet$ 及び任意の整数 $i \in \mathbb{Z}$ に対して，その (i 次) **ホモロジー群**を

$$H^i(X^\bullet) := \mathrm{Ker}\, d^i / \mathrm{Im}\, d^{i-1}$$

*m11019b@math.nagoya-u.ac.jp

と定め，本稿ではこのホモロジー群を非常に重要な対象と考えることにする．然らば，2-複体の間の射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ に誘導されるホモロジー群の間の射

$$H^i(f) : H^i(X^\bullet) \to H^i(Y^\bullet)$$

が全ての i で 0 になるのはいつかを考えるのは自然なことであろう．

定義 1.2. (i) 2-複体 $P^\bullet \in \mathsf{C}(R)$ が **relative-projective** であるとは，次の形をした 2-複体 $P_i^\bullet$ の直和 $\bigoplus_{i \in I} P_i^\bullet$ と同型であることを言う．$P_i^\bullet = (\cdots \to 0 \to P_i = P_i \to 0 \to \cdots)$.

(ii) 2-複体の間の射 f が **null-homotopic** であるとは，f がある relative-projective な対象 $P^\bullet \in \mathsf{C}(R)$ を経由することを言う．

命題 1.3. 2-複体の間の射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ が null-homotopic であれば，これに誘導されるホモロジー群の間の射 $H^i(f)$ は，全ての i で 0 となる．

これは上記の問に対する十分条件を与えている．ホモロジー群に着目した場合，null-homotopic な射を最初から 0 と見做すことは自然なアイデアであり，これを実現するものがホモトピー圏である．以下のように構成される．2-複体の圏 $\mathsf{C}(R)$ において，null-homotopic な射を全て集めるとイデアル $\mathcal{I}$ を構成し，圏 $\mathsf{C}(R)$ をこのイデアル $\mathcal{I}$ で割ったものがホモトピー圏 $\mathsf{K}(R)$ である．

定義 1.4. **ホモトピー圏** $\mathsf{K}(R)$ とは，次の対象及び射空間で定義される．

(i) $\mathrm{Ob}(\mathsf{C}(R)) := \mathrm{Ob}(\mathsf{K}(R))$.

(ii) $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(R)}(X^\bullet, Y^\bullet) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(R)}(X^\bullet, Y^\bullet)/\mathcal{I}(X^\bullet, Y^\bullet)$.

ここで，$\mathcal{I}(X^\bullet, Y^\bullet)$ は null-homotopic な射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ からなる $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(R)}(X^\bullet, Y^\bullet)$ の部分群である．

次にホモトピー圏の持つ 2 つの重要な性質について述べる．

命題 1.5. 加群圏 $\mathrm{Mod}R$ からホモトピー圏 $\mathsf{K}(R)$ への自然な埋め込み関手 $\iota : \mathrm{Mod}R \hookrightarrow \mathsf{K}(R)$ が存在する．この埋め込みは R 加群 X に対して，2-複体 $\iota X := (\cdots \to 0 \to \underbrace{X}_{\text{第 0 次}} \to 0 \to \cdots)$ を対応させるものである．

この埋め込み関手を通じて，任意の R 加群を自然に 2-複体と見做すことができる．

定義 1.6. 2-複体の圏 $\mathsf{C}(R)$ の懸垂 Σ は，ホモトピー圏 $\mathsf{K}(R)$ の自己同型関手を誘導する．これも記号を変えず $\Sigma : \mathsf{K}(R) \to \mathsf{K}(R)$ で表し，**懸垂**と呼ぶ．

命題 1.7. 2-複体 $X^\bullet \in \mathsf{K}(R)$ について，次の同型が存在する．

$$H^i(X^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(R)}(R, \Sigma^i X^\bullet).$$

ここで，R 加群 R を 2-複体と見做している．

次に 2-複体の間の射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ に誘導される，ホモロジー群の間の射 $H^i(f) : H^i(X^\bullet) \cong H^i(Y^\bullet)$ が各 i で同型になるものを考える．

定義 1.8. ホモトピー圏 $\mathsf{K}(R)$ の射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ が**擬同型**であるとは，これに誘導される射 $H^i(f) : H^i(X^\bullet) \to H^i(Y^\bullet)$ が各 i で同型になることを言う．

ホモトピー圏 $\mathsf{K}(R)$ において，擬同型を同型と見做した圏を**導来圏** $\mathsf{D}(R)$ と言う．より精確には，擬同型射全体のクラス S を考え，S による $\mathsf{K}(R)$ の Verdier 局所化 $Q : \mathsf{K}(R) \to \mathsf{K}(R)[\mathsf{S}^{-1}] =: \mathsf{D}(R)$ により定義される．

注 1.9. 可換環 A とその積閉集合 S が与えられたとき，局所環 $R[S^{-1}]$ が定義できた．$R[S^{-1}]$ において，S に属する元は全て可逆元であった．実はこの操作を圏に拡張したものが上記の Verdier 局所化である．

次の命題はホモロジー代数を考える際，導来圏が良い枠組みを与えていることを示唆している．

命題 1.10. 2-複体 $X^\bullet \in \mathsf{D}(R)$ について，次の同型が存在する．

$$H^i(X^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(R)}(R, \Sigma^i X^\bullet).$$

ここで，R 加群 R を 2-複体と見做している．

命題 1.7 と同様の同型が導来圏でも成り立つ．つまり，導来圏は複体のホモロジー群の情報を射空間として有しているのである．

2　N-複体の導来圏

本節では，2-微分の替わりに N-微分を有する N-複体を定義し，通常の 2-複体同様，ホモロジー群や導来圏が定義できることを述べる．さらに 2-複体の導来圏と N-複体の導来圏の関係について述べる．

本節を通じ $N \geq 2$ とする．加群圏 $\mathrm{Mod}R$ における N**-複体** $X^\bullet$ とは，対象と射の列で，全ての i について $d^{i-N+1} \cdots d^{i+1} d^i = 0$ を満たすものを言う．N**-複体の圏**を $\mathsf{C}_N(R)$ と表す．

定義 2.1. 正数 $r < N$ および $i \in \mathbb{Z}$ に対して，N-複体 $X^\bullet$ の**ホモロジー群** $H^i_{(r)}(X^\bullet)$ を以下で定義する：

$$H^i_{(r)}(X^\bullet) := \mathrm{Ker}(d^{i+r-1 \cdots} d^i) / \,\mathrm{Im}(d^{i-1} \cdots d^{i-r}).$$

2-複体の場合同様，N-複体の間の射にも null-homotopic が定義でき，これに誘導されるホモロジー群の間の射は 0 になる．

定義 2.2. (i) 2-複体 $P^\bullet \in \mathsf{C}(R)$ が **relative-projective** であるとは，次の形をした 2-複体 $P_i^\bullet$ の直和 $\bigoplus_{i \in I} P_i^\bullet$ と同型であることを言う．

$$P_i^\bullet = (\cdots \to 0 \to \underbrace{P_i = \cdots = P_i}_{N\text{ 個}} \to 0 \to \cdots).$$

(ii) 2-複体の間の射 f が **null-homotopic** であるとは，f がある relative-projective な対象 $P^\bullet \in \mathsf{C}(R)$ を経由することを言う．

2-複体の場合同様，null-homotopic な射の全体はイデアル $\mathcal{I}$ をなし，N-複体のホモトピー圏が定義できる．N**-ホモトピー圏** $\mathsf{K}_N(R)$ とは，N-複体を対象とし，任意の N-複体 $X^\bullet, Y^\bullet$ に対し射空間を

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}_N(R)}(X^\bullet, Y^\bullet) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_N(R)}(X^\bullet, Y^\bullet) / \mathcal{I}(X^\bullet, Y^\bullet)$$

により定義したものである．

続いて，2-複体の場合を真似て N-複体の導来圏を定義する．N-ホモトピー圏 $\mathsf{K}_N(R)$ の射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ が**擬同型**であることを，これに誘導される射 $H^i_{(r)}(f) : H^i_{(r)}(X^\bullet) \to H^i_{(r)}(Y^\bullet)$ が各 i, r が で同型になることで定義し，擬同型射全体 S による Verdier 局所化 $\mathsf{K}_N(R)[\mathsf{S}^{-1}]$ が N**-導来圏** $\mathsf{D}_N(R)$ である．通常の導来圏と同様，直感的には N-ホモトピー圏において，擬同型を同型と見做した圏である．

環 R に対して，通常の導来圏 $\mathsf{D}(R)$ と N-導来圏 $\mathsf{D}_N(R)$ の関係を調べるのは自然なことであろう．次の結果が知られている．

定理 2.3. [IKM] 次の圏同値が存在する [1]：$\mathsf{D}_N(R) \simeq \mathsf{D}(\mathbb{T}_{N-1}(R))$. ここで，$\mathbb{T}_{N-1}(R)$ は上三角行列環である．

3 $\hat{A}$-複体の導来圏

定義 3.1. [Hap, HW] 標準 k 双対を $D := \mathrm{Hom}_k(-, k)$ と表す．有限次元 k 代数 A に対して，その**反復代数** $\hat{A}$ とは，ベクトル空間

$$\hat{A} := \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A \right) \oplus \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} DA \right)$$

に，積 $(a_i, \varphi_i)_{i\in\mathbb{Z}} \cdot (b_i, \psi_i)_{i\in\mathbb{Z}} := (a_i b_i, a_{i+1}\psi_i + \varphi_i b_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ を定めたものである．

定義 3.2. 反復代数 $\hat{A}$ を自然に k 線型圏とみなす．k 線型圏 $\hat{A}$ から $\mathrm{Mod}R$ への共変 k 線型関手の圏 $\mathcal{F}un_k(\hat{A}, \mathrm{Mod}R)$ を，$\hat{A}$**-複体の圏**といい $\mathsf{C}_{\hat{A}}(R)$ で表す．

例 3.3. 反復代数 $\hat{A}$ の構造を表す有向グラフの例を見てみる．

(i) 上三角行列環 $A = \mathbb{T}_{N-1}(k)$ の反復代数 $\hat{A}$ の有向グラフは，

$$\cdots \to \bullet \xrightarrow{d} \bullet \xrightarrow{d} \bullet \xrightarrow{d} \bullet \to \cdots, \ d^N = 0$$

で与えられる．つまり，圏同値 $\mathcal{F}un_k(\hat{A}, \mathrm{Mod}R) \simeq \mathsf{C}_N(R)$ を得る．

(ii) 行列環 $A = \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の反復代数 $\hat{A}$ を表す有向グラフは，

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr, "\alpha_{n-1}"] & & \bullet \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr, "\beta^*_{n-1}"] & & \bullet \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr, "\alpha_{n+1}"] & & \bullet & \\
\cdots & & \bullet \arrow[ur, "\beta_{n-1}"'] \arrow[dr, "\alpha^*_{n-1}"'] \arrow[rr, dash, dashed] & & \bullet \arrow[ur, "\alpha^*_n"'] \arrow[dr, "\beta_n"'] \arrow[rr, dash, dashed] & & \bullet \arrow[ur, "\beta_{n+1}"'] \arrow[dr, "\alpha^*_{n+1}"'] & & \cdots \\
& \bullet \arrow[ur, "\beta^*_{n-2}"] \arrow[rr, dash, dashed] & & \bullet \arrow[ur, "\alpha_n"] \arrow[rr, dash, dashed] & & \bullet \arrow[ur, "\beta^*_n"] \arrow[rr, dash, dashed] & & \bullet &
\end{tikzcd}$$

及び関係式 $\beta_n\alpha_n = 0, \alpha^*_n\beta^*_{n-1} = 0, \alpha_{n+1}\alpha^*_n = \beta^*_n\beta_n$ により与えられる．

以上の例から分かるように反復代数が与えられれば，それを表現する有向グラフが得られる．この有向グラフに R 加群と R 準同型を貼り付けたものが $\hat{A}$-複体である．

第１，２節同様，$\hat{A}$-複体に対しても relative-projective な対象を定義する．

[1] より精確には，$\mathsf{D}_N(R)$ 及び $\mathsf{D}(\mathbb{T}_{N-1}(R))$ は三角圏構造を有することが示される．即ち，この圏同値は三角同値である．

定義 3.4. (i) 射影的な左 $\hat{A}$ 加群 P 及び R 加群 Z に対して，$P \otimes_k Z$ を次の方法で $\mathsf{C}_{\hat{A}}(R)$ の対象と見做す．圏 $\mathsf{C}_{\hat{A}}(R)$ の対象とは $\hat{A}$ から $\mathrm{Mod}R$ への関手であるから，

$$P \otimes_k Z : \hat{A} \xrightarrow{P} \mathrm{Mod}k \xrightarrow{-\otimes_k X} \mathrm{Mod}R.$$

と考えればよい．$P \otimes_k X$ の形で書ける $\mathsf{C}_{\hat{A}}(R)$ の対象を **relative-projective** と言う．

(ii) 圏 $\mathsf{C}_{\hat{A}}(R)$ の射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ が **null-homotopic** であるとは，f がある relative-projective な対象を経由することを言う．

null-homotopic 射全体はイデアル $\mathcal{I}$ を成す．**$\hat{A}$-ホモトピー** $\mathsf{K}_{\hat{A}}(R)$ とは $\mathsf{C}_{\hat{A}}(R)$ をイデアル $\mathcal{I}$ で割ったもの，つまり射空間を

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}_{\hat{A}}(R)}(X^\bullet, Y^\bullet) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_{\hat{A}}(R)}(X^\bullet, Y^\bullet)/\mathcal{I}(X^\bullet, Y^\bullet)$$

としたものである．

$\hat{A}$-導来圏を定義するには，ホモロジー群と擬同型を定義する必要がある．2-複体 $X^\bullet$ のホモロジー群 $H^i(X^\bullet)$ がホモトピー圏上の射空間 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(R)}(R, \Sigma^i X^\bullet)$ と同型であることに着目する（命題 1.7）．

定義 3.5. (i) $\hat{A}$ 加群 A 及び R 加群 R に対して，$\hat{A}$-複体 $A \otimes_k R$ を考える．このとき $\hat{A}$-複体 $X^\bullet$ の（i 次）**ホモロジー群**を，

$$H^i(X^\bullet) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(R)}(A \otimes_k R, \Sigma^i X^\bullet)$$

で定める．ここで Σ は $\mathsf{K}_{\hat{A}}(R)$ の**懸垂**である [2]．

(ii) $\hat{A}$-ホモトピー圏 $\mathsf{K}_{\hat{A}}(R)$ の射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ が**擬同型**であるとは，これに誘導される射 $H^i(f) : H^i(X^\bullet) \to H^i(Y^\bullet)$ が各 i で同型になることを言う．

(iii) 擬同型全体 S による Verdier 局所化 $\mathsf{K}_{\hat{A}}(R)[\mathsf{S}^{-1}]$ を **$\hat{A}$-導来圏** $\mathsf{D}_{\hat{A}}(R)$ と言う．

最後に主結果として，$\hat{A}$-導来圏 $\mathsf{D}_{\hat{A}}(R)$ も環 R を取り換えることで通常の導来圏として，実現できることを述べる．

定理 3.6. 圏同値 $\mathsf{D}_{\hat{A}}(R) \simeq \mathsf{D}(A \otimes_k R)$ が存在する．

参考文献

[Hap] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 119. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[HW] D. Hughes, J. Waschbüsch, *Trivial extensions of tilted algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), no. 3, 641–648.

[IKM] O. Iyama, K. Kato, J. Miyachi, *Derived categories of N-complexes*, preprint arXiv:1309.6039.

[2] 2-複体の圏において懸垂とは 2-複体を左にずらす操作であった．しかし，$\hat{A}$-複体の懸垂はこのような簡単な記述にはならない．任意の $\hat{A}$-複体 $X^\bullet$ に対して，ある relative-projective な対象 $P \otimes_k Z$ 及び完全列 $0 \to X^\bullet \to P \otimes_k Z \to \Sigma X^\bullet \to 0$ がいつでも存在することが示される．この Σ が $\hat{A}$-ホモトピー圏と $\hat{A}$-導来圏の懸垂を導くのである．