低次元トポロジーに現れる双線型形式

野坂 武史 (Takefumi Nosaka)*

九州大学 数理学研究院, 2015 年 2 月

本稿では, 多様体論の研究において, 位相幾何学によるアプローチを紹介したい. とくに, (相対) カップ積に焦点をあて, そこから見える双線形型式について, 紹介する. また筆者の研究を紹介したい.

本論の前に, 用語を確定しておく. 多様体 X とは (実) 可微分多様体を指し, コンパクトで向付きとし, 境界はあってもいいとする. また n は多様体の次元とする. なお, 誠に恐縮であるが紙幅の都合のため, 幾何やトポロジーの (修士生的な) 基礎用語は参考文献 ([Bro, 服部, 田村] 等参照) に回した. なお本稿の記述は, 幾何や代数 (数論) 幾何分野の院生でも読めるように目指した.

1　復習：多様体論での交叉形式とカップ積

本節では多様体論の分類問題の基本事項をざっと復習し (幾何専門の方は次節へ転読してよい), さらに「局所系のカップ積を何故に考えるか」を説明したい (下記の二つの問 (I)(II) 参照). ただし基礎概念として, 多様体や, (整数係数のコ) ホモロジー群などは仮定する ([Die, 服部, 田村] 参照).

手始めに, 交叉やカップ積のよく知られた歴史をざっと復習する. デュドネの歴史書 [Die, I 部 1 章] によれば, 100 年前にポアンカレが交叉形式を導入した理由は, 次式のポアンカレ双対を示す為にあったという: $\mathrm{dim} H_i(X;\mathbb{R}) = \mathrm{dim} H_{n-i}(X;\mathbb{R})$. つまりホモロジー上に 2 次形式を構成し, その非退化性から次元の一致を見出そうとした. しかし「交叉」の定義が曖昧なうえ, (Heegaard の指摘により) 証明が間違っていた. しかし証明方針を変更し, ポアンカレ自身は次の双対定理を示した (とされる):

$$^{\exists}\text{同型射}\ \ \mathrm{P.D.}: H_i(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{n-i}(X,\partial X;\mathbb{Z}), \qquad H_n(X,\partial X;\mathbb{Z}) \cong H^n(X,\partial X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

[Die, I 部 3 章] にある様に, その後数十年の歳月で, ホモロジー論は整備されていく. 交叉に関しては, コホモロジー環とカップ積 $\smile$ の導入によって整理される (Čech や Whitney の仕事). 実際, 交叉形式とは, 次で定義される:

$$H_i(X;\mathbb{Z}) \times H_{n-i}(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}; \qquad (x,y) \longmapsto \mathrm{P.D.}^{-1}\big(\mathrm{P.D.}(x) \smile \mathrm{P.D.}(y)\big).$$

これはイメージ通りの交叉を体現し, 念願の非退化性も示された (この際, $\mathbb{Z}$ の性質が大切. cf 定理 3.3).

多様体の同相類を調べるうえで, 交叉型式が何故大事かを以下 2 段落で大まかに述べよう. まず基本となる方針は, “モース関数による双対胞体分割” である ([田村, 5 章] 参照). それはおおよそ「(有向) 多様体を, 上からと下からとで双対的に分解する研究手法」と譬えれる事が出来る. する

*nosaka@math.kyushu-u.ac.jp

と上下がぶつかる中間地点に, 本質的な情報が集中する. これを定量的に捉える為, 双線型形式や "Whitehead 群" 等を用いるという訳である. 以上の方針は 70 年代で華々しく成功を収め (特に "h-ボルディズム定理" や高次元 Poincaré 予想の証明; [田村, 7 章] 参照), そしてその後の (代数的) 手術理論の基本ともなっている.

この手術理論は, X の基本群がない場合 (つまり $\pi_1(X) = 0$) に, 至極満足いく解答を与えた. というのも, 交叉形式が多様体のクラスをよく分類し, 要するに「定数層のコホモロジーと特性類ぐらいを考えればよい」事となったからである. 大まかになるが, 有名な事実を列挙しておこう.

- $n \geq 5$ の時, Browder, Sullivan, Novikov, Wall らによる手術理論. 微分同相類 (或る有限個を除き) は交叉形式と特性類とトーションで決まる.

- $n = 4$ の場合 [Freedman-Quinn の仕事]. X の位相同相類は交叉形式と "Kirby-Seibenmann 類" によって決まる (基本道具は Casson ハンドルを用いる). 逆に, 任意の unimodular な $\mathbb{Z}$ 上の対称双線形形式に対し, それを交叉形式をもつような 4 次元多様体を構成できる. [1]

- $n = 3$ または 2 の場合. いわゆるポアンカレ予想の事で, 微分同相 $X \cong S^n$ となる.

しかし他方, X が $\pi_1(X) = 0$ でない場合は多くの困難があり極端に難解になる. まず h-ボルディズム定理は成立せず, Whitehead 群内のトーションを考えないといけない (所謂, s-ボルディズム定理). さらに, 局所系コホモロジー環構造がある場合, その双線型形式が $\mathbb{L}$-群 (≒ Whitehead 群の高次版) に障碍類として現れる. この様にホモトピー論が大変大切なのだが, いわんや有理ホモトピー型についても, Sullivan 極小モデルを研究する事は難しい ($\pi_1(X)$ が有限群の場合ですら). 研究しやすそうな高次元結び目に関しても (Ranicki の本 [R] 等を参照), 「分類」という完璧主義的な目標設定に混沌を垣間見てしまう.

混沌状態の場合, 研究方針や問いを弱めるのが妥当である. 幾らか方針はあると思うが, 自分の力量と現状数学の土俵へと誘い込むのが常套手段である. そこで本稿は次の自然な問題に注目したい:

(I) どの様な局所系を取ると, 多様体の構造を反映したり, 面白い理論が出来るか？

(II) どの多様体や設定ならば, 双線型形式を計算できるだろうか？

私見では, この問題意識は, 主題の (非安定に見えそうな) 3 次元多様体論にも有効だと考えている. 実際, 幾何化予想の解決から基本群の情報でだいたい X の構造が解ってしまうのだが, やはり, $\pi_1(X)$ から何か情報や定量的な数をとり出さないといけない. それも, 既存の量 (複素体積や ℓ^2-ホモロジーなど) は一見ホモトピカルに感じる. 例えば, 局所系係数の (コ) ホモロジー (業界用語で振れアレクサンダー加群という) がこの 10 年近く研究され, 3 次元多様体の性質をいくらか反映する事が解ってきた (概要 [FV, Hil] 等参照). この背後には, 課題「高次元の安定的な議論がどこまで低次元で有効か」が問われているのだろう (cf. [COT]). もちろん導来圏のように, 複体全体を up to 弱ホモトピー同値に調べる研究もあり, それはそれで三角構造的な方向は王道的でカッコよさそうで良いと思う. しかしそうはいっても, 一つの対象を真剣に観察することも大切だろう.

そこで筆者は上記の問題意識に基づき, 研究を進めた. 局所系カップ積の汎用性を示す試みともいえる. ただ, 話が込み入るので, 以上を本稿の前置きにし, 次節に進めよう.

[1] なお微分構造はエキゾチックな現象が多く, 謎も多い. 例えば, 或る位相多様体に加算無限個の微分構造が入ることが知られる. ゲージ理論からのアプローチが多い.

2　局所系の相対カップ積と, 定理の紹介

前節ではカップ積の歴史を概説し, 問題意識を二つ (I)(II) 述べた. 本節から数式を交えながら,「局所系の相対カップ積」を解説し, 筆者の定理を紹介する. なお, 局所系の (コ) ホモロジー群については説明しないが (詳細は [服部, §6.1] にある),「加群への右作用 $M \curvearrowleft \pi_1(X)$ から定義される (コ) ホモロジー群」とだけ了承すればよい.

まず相対カップ積を説明する. 定義自体は簡単で, その入出力は次の様にまとめられる.

相対カップ積の定義. 群準同型 $f : \pi_1(X) \to G$ の不変量として.

入力　M: A 上の右 G-加群,　(ここで A は involution$^-$ 付き可換環)

$\psi : M^2 \longrightarrow A$,　　A-双線型関数 s.t. $\psi(x \cdot g, y \cdot g) = \psi(x, y)$　$^\forall g \in G$, $^\forall x, y \in M$

$\mu : 2k$-サイクル.　　(これは $H_{2k}(X, \partial X; \mathbb{Z})$ の class と思える).

出力　局所系係数コホモロジー $H^1(X, \partial X; M)$ 上の双線型形式. 厳密な定義は, 次の合成射

$$\smile_\psi : H^k(X, \partial X; M)^{\otimes 2} \xrightarrow{\ \smile\ } H^{2k}(X, \partial X; M^{\otimes 2}) \xrightarrow{\bullet \cap \mu} M \otimes M \xrightarrow{\langle \psi,\ \bullet \rangle} A. \qquad (1)$$

ここで (1) 内の 1 と 2 番目の射は, それぞれカップ積とキャップ積である (詳細は [服部] 参照). この様に位相幾何の基本事項から定義される. 非常に一般的な設定だが, 実 2 次元の場合, 次の様に重要なクラスを含む.

例 2.1 (**Goldman リー代数** [Go])**.** X を種数 g の閉曲面 Σ_g とし, $\mu \in H_2(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ を基本類とする. また G を半単純な簡約 Lie 群とし, M をそのリー環 $\mathfrak{g}$ とすれば G が作用する (随伴表現という). 加えて $\psi : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ を Killing form とする (半単純性より非退化). すると, 上記の設定より, $\smile_\psi$ を得る.

今えた $\smile_\psi$ は以下の様な幾何的解釈がある (詳細は [Go] を参照). まず $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), G)$ を, 平坦 G-束の同型類と同一視し, variety 構造を入れる. もし f が滑らかな点とすると, コホモロジー $H^1(\Sigma_g; \mathfrak{g})$ は, f の接空間と同一視することが出来る. すると $\smile_\psi$ はその variety の滑らかな開集合上にシンプレクティック構造を与える. これは, 次をモーメント写像としたシンプレクティック商 $\mu^{-1}(0)//G$ とも譬えられる (細かい難点は省く):

$$\mu : \{\ G\text{-束}\Sigma_g \times G \to \Sigma_g\text{の接続.}\ \}/\{E\ \text{の自己同型}\ \} \longrightarrow \Gamma^0(\Sigma_g, \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}), \quad A \longmapsto A\ \text{の曲率}\ F_A.$$

さらに論文 [Go] では, この代数構造の普遍物が (ホモロジー的に交叉形式で) 構成されている. それは **Goldman リー代数**というもので, 今でも色々な研究があり謎も多い. 今後の理解の進展が求められるだろう.

だがそもそも, 局所系相対コホモロジー上のカップ積は, 定義からしてすこぶる思弁的で, 定量的に計算不可能に思える. 簡単そうな実 2 次元でも, 上例の様に難しく造詣が深い. だから 3 次元対象物のカップ積は, しごく煩瑣になると思われ, 今迄の研究や考察はほぼ皆無だった様である.

しかし筆者は次の定理の様に, 計算法を与えた:

定理 2.2 (曖昧な陳述. 詳細は [N2].)**.** L を絡み目 [2] とし, $k = 1$ で $X = S^3 \setminus L$ とする. 上設定の入力物を任意にとってきたとき, その相対カップ積が "結び目の図式" から比較的簡単に計算できる.

---

[2] 用語の復習. **絡み目**とは, 有限非交和の円周から 3 次元球面 S^3 への滑らかな埋込である. つまり, $L : S^1 \sqcup \cdots \sqcup S^1 \hookrightarrow S^3$ の事である. S^1 の連結成分が 1 個の時, L を**結び目**という. なお, $S^3 \setminus L$ と書いたら, 埋込んだ後に管状近傍をとった補空間を指す. また**図式**とは, 或る射影 $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を通じて, 横断的なはめ込み $p \circ L : S^1 \sqcup \cdots \sqcup S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ と, 交差の上下情報をいう.

手前味噌になるが, 定理 2.2 の意義を 4 つ述べたい. まず, 思弁的で等閑視されがちな相対カップ積が図式から計算可能になった点は刷新といえる. 第二に, 非常に一般的な入力設定であり, 計算式が比較的鮮明なので, 色々な方にでも使い易い (と思う). 第三に, 境界 ∂X がトーラスであるため, 相対コホモロジーが煩雑そうだが, その点きにしなくてよい. 第四に, この計算法を与える際, 筆者の専門 “quandle” の議論を経由しているため, quandle の意義や評価を一新させるインパクトを持つ (と期待している).

要するに, 相対カップ積を単走的な研究を将来しても, この定理が実体的な具体性と安心感を保障してくれる訳である. 筆者個人の期待として, 定理 2.2 が相対カップ積に市民権を与える魁 (さきがけ) になってほしいものである.

3 古典的 Blanchfield ペアリング VS カップ積.

定理 2.2 を思い返すと, 非常に一般的な入力設定である. だがアブストラクト砂漠に陥らない為にも, 何か興味深い既存物を抽出しなければならない. そこで, 本節では, 最も簡単そうな $G = \mathbb{Z}$ の場合でも, 古典版 Blanchfield 双対 [Bla] を復元する事を見る. この帰結的な示唆として, 将来もし G や M に他の具体例を代入すれば, 何か良い結果や展開を期待できるだろう.

さて本節は以下のように進めたい. 目標は主定理 3.1 と 3.2 の陳述である. その為, 節 3.1 でざっと復習し, 節 3.2 でカップ積の関連を見る.

3.1 巡回被覆のミルナー双対定理と, 局所系版への換言.

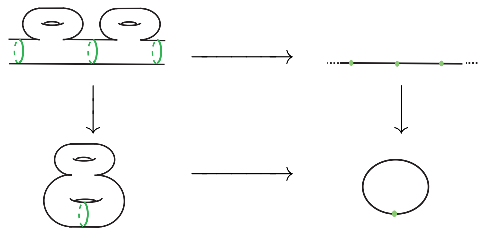
まず古典版 Blanchfield 双対をざっとのべる. それは, 全射 $\alpha : \pi_1(M) \to \mathbb{Z} = \langle t^{\pm n} \rangle$ が与えられた時の双対定理であり, それも, 3 つのバージョンがある [Ka]. 3 つ存在する大雑把な理由は, 係数 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ がクルル次元 2 なので, $i \in \{0, 1, 2\}$ に対し Tor^i に値を持つよう出来るからである. 但し, その定式化とアイディアの説明は [河内 2] 付録 B にある通り難儀である. そこで, 本節は Tor^1-版のみを位相的考察から説明する.

まず $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ より上記 α を, あるセル写像 $\hat{\alpha} : X \to S^1$ で代表させる. M がコンパクトなので, $\hat{\alpha}$ は (摂動して) モース関数としてよい. 正則値 $x_0 \in S^1$ に対し, 逆像 $\hat{\alpha}^{-1}(x_0) \subset X$ を Σ とおこう. 超曲面 Σ も向付くので, $\Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \subset X$ と管状近傍をとる. $m \in \mathbb{Z}$ で添え字づけたコピーを考え, その添え字を右下につける. すると α に付随する巡回被覆空間 X_∞ は次の様に構成される:

$$X_\infty := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \big(X_m \setminus \big(\Sigma \times (-\epsilon_m, \epsilon_m) \big) \big) / \sim, \qquad , \text{ where } \ (x, -\epsilon_m) \sim (x, \epsilon_{m+1}), \quad {}^{\forall} x \in \Sigma.$$

従って, $\hat{\alpha}$ は $\tilde{\alpha} : X_\infty \to \mathbb{R}$ に持ち上がり, 次の可換図式を満たす.

$$\begin{tikzcd} X_\infty \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, "\text{被覆}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\text{射影}"] \\ X \arrow[r, "\hat{\alpha}"] & S^1 \end{tikzcd}$$



すると双対定理は次の様に与えられる:

定理 3.1. 全ての i に対し, $H^i(X_\infty, \partial X_\infty; \mathbb{Q})$ が有限次元と仮定する [3]. この時, 線形同型

$$\delta_c^* : H^i(X_\infty, \partial X_\infty; \mathbb{Q}) \cong H^{i+1}_{\mathrm{compact}}(X_\infty, \partial X_\infty; \mathbb{Q}),$$

があって, カップ積に関し等式 $\delta_c^*(x \smile y) = \delta_c^*(x) \smile y$ を満たす.

特に, (コンパクト台の Poincaré 双対定理より) 次の双線形写像は非退化である.

$$<, >_\alpha : H^i(X_\infty, \partial X_\infty; \mathbb{Q}) \times H^{n-1-i}(X_\infty, \partial X_\infty; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\smile} H^{n-1}(X_\infty, \partial X_\infty; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\bullet \cap [\Sigma]} \mathbb{Q}.$$

注. 有限次元の仮定について言及しておこう. まず被覆変換 $\tau : X_\infty \to X_\infty$ を考えると, $H^i(X_\infty, \partial X_\infty; \mathbb{Q})$ を $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$-加群とみなせる. すると, 有限次元性より単因子論から $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]/e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]/e_s$ に同型である, 但し $e_i \in \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$. これは「$\mathrm{Tor}^1$-版」とよばれる所以である. なお, **Alexander 多項式** Δ とは, $e_1, \ldots, e_s$ の最小多項式として定義される. なおこの定理は $\mathbb{Z}$ 係数への拡張は正しくなく, 特に X のファイバー性と関わる ([M, 節 3-4] 参照).

奇数次元のとき, $\smile_\psi$ の形に換言できることをみる [4]. 遂行するにあたり, まずは [Neu, §11] の用語を復習する. $\mathbb{F}[\![t]\!]_+$ を, 形式的 Laurent 冪級数 $\sum_{i \geq n} a_i t^i$ with some $a_i \in \mathbb{F}$, $n \in \mathbb{Z}$ で構成される環とする. すると非零元 $x \in \mathbb{F}[t^{\pm 1}] \setminus \{0\}$ は, その環 $\mathbb{F}[\![t]\!]_+$ の中で可逆元である. だから, 商体からの自然な入射 $i_+ : \mathbb{F}(t) \hookrightarrow \mathbb{F}[\![t]\!]_+$ を得る. そこで, $x \in \mathbb{F}(t)$ に対して, $\mathrm{tr}(x)$ を $i_+(x)|_{t=0} - i_+(\bar{x})|_{t=0}$ によって定めよう, 但し, 記号 $|_{t=0}$ は t^0-の係数を表す. すると, このトレース写像は well-defined な $\mathbb{F}$-線型写像を次のように誘導する:

$$\mathrm{Tr} : \mathbb{F}[t^{\pm 1}]/(\Delta) \hookrightarrow \mathbb{F}(t)/\mathbb{F}[t^{\pm 1}] \xrightarrow{\mathrm{tr}} \mathbb{F}; \qquad x \longmapsto [x/\Delta] \longmapsto \mathrm{tr}([x/\Delta]).$$

なお特別な場合として, Δ が既約多項式ならば, Tr は拡大体のトレースに一致する.

定理 3.2 ([Neu] が自明係数ホモロジー版, [N2] は局所系版)**.** [5] $H^i(X_\infty, \partial X_\infty; \mathbb{Q})$ が有限次元と仮定する. さらに $A = M = \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]/(\Delta)$ とし, $\psi_0 : M \otimes M \to \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]/(\Delta_K)$ を $\psi_0(x, y) = \bar{x}y$ と定義する. このとき, 或る同型写像 Υ^*_Δ があって, 次の可換図式をみたす:

$$\begin{tikzcd}
H^k(X, \partial X; M)^{\otimes 2} \arrow[r, "\smile_\psi"] \arrow[d, "(\Upsilon^*_\Delta)^{\otimes 2}"', "\cong"] & \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]/\Delta \arrow[d, "\mathrm{Tr}"] \\
H^k(X_\infty, \partial X_\infty; \mathbb{Q})^{\otimes 2} \arrow[r, "\langle , \rangle_\alpha"] & \mathbb{Q}.
\end{tikzcd}$$

注. 逆に, [Neu, §11 の注] の様に, $\smile_\psi$ は $\langle , \rangle_\alpha$ から復元できる. 実際, $[a] = [i_+^{-1}\big(\sum_{j \geq 0} \mathrm{Tr}(t^{-j}a) \cdot t^j\big)]$ が任意の $[a] \in \mathbb{F}(t)/\mathbb{F}[t^{\pm 1}]$ に対し成立する; よって, $[\mathcal{Q}_\psi(x, y)/\Delta] = [i_+^{-1}\big(\sum_{j \geq 0} \Upsilon^*_\Delta(\tau_*^{-j} x) \smile_{KL} \Upsilon^*_\Delta(y) \cdot t^j\big)]$ となる. 要するに, 我々の公式 $\smile_\psi$ とミルナーのカップ積 $\smile_{KL}$ は等価である.

---

[3]仮定を満たす典型例として, 結び目の補空間がある. 実際, 一般に, ホモロジーが S^1 のと同型, つまり $H^*(X; \mathbb{Q}) \cong H^*(S^1; \mathbb{Q})$ の場合には, この仮定を満たす (この証明は $X_\infty \to X$ の Wang 完全列を考えればよい). なお, 実はこの仮定は必要ではないが, [Neu] にある通り, 主張が複雑になる.

[4]Chern 類などの (1 次) 特性類を用いる方法は, 偶数次元の多様体に有用である (指数定理を思いおこそう). 他方で, 奇数次元の不変量を構成するには, 一段階上で考える必要がある. 二次特性類などがあげられる.

[5]講演中に「この定理はどこまで一般化できるか？」と質問を頂きました. 私のある答え [N2] として, 閉三次元多様体で, 標数 0 上の線型表現の局所系への拡張があります.

3.2　カップ積から古典版 Blanchfield ペアリングへ

本節では古典版 Blanchfield ペアリング [Bla] を紹介したい. 前節ではミルナー双対定理は体上であったが, 本節は整数係数上への拡張と思えようになる (定理 3.3). 本稿では, 結び目 $K : S^{2k-1} \hookrightarrow S^{2k+1}$ に関し $X = S^{2k+1} \setminus K$ とおき, f をアーベル化 $\pi_1(S^3 \setminus K) \to \mathbb{Z} =: G$ とした場合を考察する (というのも, この場合, 3 つの双対定理のうち, Tor^1-以外は 0 となり自明な事が知られているため).

古典版ペアリングとは, 巡回被覆空間 X_∞ のホモロジー群に入る非退化な双線型形式であった. その定義を手早く復習する. X_∞ の構成から $H_k(X_\infty; \mathbb{Z})$ は局所系ホモロジー群 $H_k(X; \Lambda)$ と同一視できる (所謂 "Shapiro の補題"). すると $H_1(S^1; \mathbb{Z}) \cong H_1(X; \mathbb{Z})$ より, $H_k(X_\infty; \mathbb{Z})$ は捩れ Λ-加群となる. その annihilate する最小多項式を $\Delta_K \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ とかき, **Alexander 多項式**と呼ぶ. すると, 定数層の短完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \xrightarrow{\Delta_K\text{-倍}} \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \longrightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/\Delta_K \longrightarrow 0$$

が誘導する境界準同型 δ_* は, 同型 $H_{k+1}(X; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/\Delta_K) \cong H_k(X; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ を誘導する. そこで, 次の同型射たちの合成をえる:

$$H_k(X; \Lambda) \overset{\delta_*^{-1}}{\to} H_{k+1}(X; \Lambda/\Delta_K) \overset{\text{P.D.}}{\longrightarrow} H^k(X, \partial X; \Lambda/\Delta_K) \longrightarrow H^k(X; \Lambda/\Delta_K) \to \mathrm{Hom}(H_k(X; \Lambda),\ \Lambda/\Delta_K).$$

最後の写像は普遍係数定理に現れる同型射であり, 4 番目のは, 自然な写像の引き戻しである. まとめると, (古典的)**Blanchfield ペアリング**とは, この写像に随伴する, 双線形型式として定義される:

$$\mathrm{Bl}_K : H_k(X_\infty; \mathbb{Z})^{\otimes 2} = H_k(X; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}])^{\otimes 2} \longrightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/\Delta_K.$$

この Bl_K は定義から非退化である. 特に, 対称性 $\overline{\Delta_K} = \Delta_K$ がわかる.

このペアリング Bl_K の性質を言及しよう. まず高次元結び目では強力な不変量であることが半世紀ほど前に示されている (詳細は [Hil, R] を参照).

- "Seifert 行列" という或る交差形式が解った場合, Bl_K は行列表示可能である.
- $k \geq 2$ に対し, 二つの結び目 K_1 と K_2 が単純とする (i.e., $\pi_2(X) \cong \cdots \cong \pi_{k-1}(X) \cong 0$). このとき, K_1 と K_2 がイソトピーで移りあう事と, Bl_{K_1} と Bl_{K_2} が同型である事は同値である.
- $k \geq 2$ に対し, 結び目のコボルディズム群が或る "Witt 群" に同型で, $\bigoplus^\infty \mathbb{Z} \oplus (\bigoplus^\infty \mathbb{Z}/2) \oplus (\bigoplus^\infty \mathbb{Z}/4)$ とも同型である. これは Blanchfield ペアリングらで生成される.
- $k = 1$ に対し, Bl_{K_1} と Bl_{K_2} が同型である必要十分条件は, 二つの 1 次元結び目 K_1, K_2 が "ダブル Δ 移動" で移りあう事である [NS].

しかしながら, 定義中に δ_*^{-1} を用いた為, いまいち腑に落ちない定義である. 計算公式はある程度あるものの, 計算例は少なかった. しかし, カップ積との関連や, 具体的な計算法は今まで成功していなかった (様である). そこで筆者は次の定理の様に, 綺麗な形でカップ積から復元することに成功した. 即ち

定理 3.3 ([N2]). $k = 1$ とし, Alexander 多項式を Δ_K とかく. さらに $M = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(\Delta_K)$ とし, $\psi_0 : M \otimes M \to \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(\Delta_K)$ を $\psi_0(x, y) = \bar{x}y$ と定義する.

この時, 同型 $H_1(X; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]) \cong H^1(X, \partial X; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/\Delta_K)$ があって, 双線型形式として次式が成立:

$$a \smile_\psi b = \frac{1+t}{1-t} \cdot \mathrm{Bl}_K(a \otimes b) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(\Delta_K),$$

帰結を二つ述べる. 第一に, この定理を $\mathbb{Q}$ でテンソルする事で, 定理 3.1 内の δ_c^* は, 短完全系列の誘導した上記の δ_* で解釈できたことになった (ミルナーの論文 [M] にも示唆があったが, 非常に曖昧だった). 加えて, 図的計算法を与えた定理 2.2 を思い出すと $k=1$ の場合の定理 3.3 は Bl_K の計算法を与えたことになる.

3.3 定理 3.1 と 3.2 の証明概略.

定理 3.1 と 3.2 は, 主張自体が一見不思議に感じる. そのため証明を概略する (但し読みとばしてよい). 証明は Mayer-Vietoris の議論を基本とした初等的なものである.

証明 (定理 3.1 の証明. Milnor[M])**:** まず $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$ に対し, 次のふたつのフィルターを定義する:

$$N_p^+ := \tilde{\alpha}^{-1}\big((-\infty, p+x_0)\big), \quad \text{and} \quad N_q^- := \tilde{\alpha}^{-1}\big((-q+x_0,\infty)\big).$$

そして, みつ組 $(X_\infty,\ \partial X_\infty\cup N_p^+,\ \partial X_\infty\cup N_q^-)$ による $\mathbb{Q}$-係数 Mayer-Vietoris 列を考えよう:

$$\to H^i(X_\infty,\partial X_\infty) \xrightarrow{\delta_c^*} H^{i+1}(X_\infty,\partial X_\infty\cup N_q^+\cup N_q^-) \longrightarrow \bigoplus_{\pm} H^{i+1}(X_\infty,\partial X_\infty\cup N_q^\pm) \to \qquad (2)$$

定義より, $X_\infty\setminus(N_p^+\cup N_q^-)$ はコンパクトで, $\cap_{p\in\mathbb{Z}}N_p^+ = \cap_{q\in\mathbb{Z}}N_q^- = \emptyset$ となる事に気づこう. すると $q\to-\infty$ で逆極限をとると, 完全列 (2) の中央は, 定義からして X_∞ のコンパクト台コホモロジーになる. ここで注意すべき事に, 境界準同型 δ_c^* を chain レヴェルでみれば, 次の合成と一致する:

$$H^i(X_\infty,\partial X_\infty;\mathbb{Q}) \longrightarrow H^i(\Sigma,\partial\Sigma;\mathbb{Q}) \longrightarrow H^{i+1}_{\mathrm{compact}}(X_\infty,\partial X_\infty;\mathbb{Q}), \qquad (3)$$

ここで一番目の写像は入射の誘導射であり, 二番目のは Gysin 写像 (≒高次順像の一種) である. 従って, いわゆる射影公式は, 等式 $\delta_c^*(x\smile y)=\delta_c^*(x)\smile y$ を意味する.

最後に目標の δ_c^* の同型性を示そう. それには (2) の三項目に対応する $H_i(X_\infty,\partial X_\infty\cup N_q^\pm;\mathbb{Q})$ が 0 に収束する事を示せばよい. $H_i(X_\infty)$ は有限次元だから, その基底となる i-サイクルを選んでおく. すると十分小さな q に対して, そのサイクルは $N_q^\pm$ に入る. 従って, 目標の 0 収束を示せた. □

証明のスケッチ (定理 3.2)**:** まず下記の可換図式を準備する. $\mathbb{F}[\![\mathbb{Z}]\!]$ を, 形式的級数 $\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_it^i$ with $a_i\in\mathbb{F}$ の成す $\mathbb{F}[t^{\pm1}]$-加群とする. さらに $\pm$ に対し, $\mathbb{F}[\![\mathbb{Z}]\!]_\pm := \{\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_it^i\in\mathbb{F}[\![\mathbb{Z}]\!] \mid a_{\pm k}=0$ for k sufficiently small. $\}$ とし, 埋込み $\iota_\pm:\mathbb{F}(\!(t)\!)\to\mathbb{F}[\![\mathbb{Z}]\!]_\pm$ を $i_+(x)$ と $i_+(\bar{x})$ で定義する. すると差分 $\iota_+-\iota_-$ は $q:\mathbb{F}(\!(t)\!)/\mathbb{F}[t^{\pm1}]\to\mathbb{F}[\![\mathbb{Z}]\!]$ を誘導する. ここで $\mathbb{F}[\![\mathbb{Z}]\!]_+\cap\mathbb{F}[\![\mathbb{Z}]\!]_-=\mathbb{F}[t^{\pm1}]$ に気づくと,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{F}[t^{\pm1}] \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{F}(\!(t)\!) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_+\oplus\iota_-"] & \mathbb{F}(\!(t)\!)/\mathbb{F}[t^{\pm1}] \arrow[r] \arrow[d, "q"] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & \mathbb{F}[t^{\pm1}] \arrow[r, "\mathfrak{s}"] & \mathbb{F}[\![\mathbb{Z}]\!]_+\oplus\mathbb{F}[\![\mathbb{Z}]\!]_- \arrow[r, "\mathfrak{t}"] & \mathbb{F}[\![\mathbb{Z}]\!] \arrow[r] & 0 & \text{(exact),}
\end{tikzcd} \qquad (4)$$

という定数層の可換図式を得る. ここで $\mathfrak{s}$ と $\mathfrak{t}$ は写像 $x\mapsto(x,-x)$ と $(x,y)\mapsto x+y$ で夫々定めた.

次に, 上記の δ_c^* を代数的に考察する. まず X の CW-複体構造を固定し, X_∞ にその持上げで CW-複体と思う. 特に, 被覆 $X_\infty\to X$ の各セル上での制限が同相である. するとセル複体 $C_*(X;\mathbb{Z})$ は, $C_*(X;\mathbb{Z}[t^{\pm1}])$ と同一視される. 同様に, $C_*(\lim N_q^\pm;\mathbb{Z})$ は $C_*(X;\mathbb{F}[\![\mathbb{Z}]\!]_\pm)$ に, コンパクト台の複体 $C_*^{\mathrm{compact}}(X;\mathbb{Z})$ は $C_*(X;\mathbb{F}[\![\mathbb{Z}]\!]_\pm)$ に同一視できる. そこで上記の底辺にある連結準同型を考えてみよう. 後は,「その準同型の t^0-係数が, 上記の δ_c^* と一致する」事を見ればよい. だが詳しい証明は少々面倒なので, 関心ある方は [Neu, §12] か [N2] を御覧下さい.

4 高次 Blanchfield ペアリングのお話

古典版のペアリングを前節で説明したが, 本節では高次版を紹介したい. 筆者の研究方針・戦略を先に述べておくと, 「先程の定理らにより古典版をやりきったので, 将来は, 高次版もカップ積に換言し止揚したい」と目論見に基づいている.

高次 Blanchfield ペアリングとは, おおよそ「$S^3 \setminus K$ の可解被覆空間上での Seifert 膜による交差形式」の事である. その高次版ペアリングは, Cochran-Orr-Teichner[COT] による次の有名な (有理的) 可解フィルターに役立った:

$$\cdots \subset \mathcal{F}_{(n.5)} \subset \mathcal{F}_{(n)} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{(1.5)} \subset \mathcal{F}_{(1)} \subset \mathcal{C}$$

ここで, $\mathcal{C}$ とは, 大雑把には結び目のコボルディズム群で, **位相的コンコルダンス群**と呼ばれる (詳細は [河内 2] 参照). このフィルターは $\mathcal{C}$ に階層的な研究指針を提示した. 但し, 彼らの議論は具体的計算に程遠く, 定量的な数に落とすには困難が伴う. 未解明な事項が多く難しい.

高次版ペアリングを説明したいため, 非可換環論の用語を準備する. $\pi^{(0)} := \pi_1(S^3 \setminus K)$ とし, 後は帰納的に $\pi^{(i+1)}$ を交換子群 $[\pi^{(0)}, \pi^{(i)}]$ で定義する. そして, 群環 $\mathbb{Z}[\pi^{(0)}/\pi^{(n)}]$ を考える. 可解性から, この非可換環は "Orr-domain" というものになる. 特に商体が取れる. ここで, この群環を $\pi^{(1)}/\pi^{(n)} \setminus \{0\}$ で局所化した環を R_n とかこう. ここで, 群環 $\mathbb{Z}[\pi^{(1)}/\pi^{(n)}]$ の商 (斜) 体を $\mathbb{K}_n$ と書くとすると, R_n は (skew) 多項式環 $\mathbb{K}_n[\tau^{\pm 1}]$ に環同型である. 特に R_n は PID(単項イデアル整域) になる. すると, 可解商を通じて $\pi_1(S^3 \setminus K)$ が R_n に作用するので, R_n を局所系と思える. すると, 可解性 (もっと一般に PTFA 性) から, Tor^i を評価する事ができ, 次が示された:

命題 4.1 ([COT])**.** 局所系のホモロジー群 $H_*(S^3 \setminus K; R_n)$ は有限生成かつ捩れ加群である.

この最小の annihilator を $\Delta \in R_n$ とかき, **n-次 Alexander 多項式**と呼ぶ. 要点は Δ が非零な点である. すると, 古典版と同様に次の同型が構成される:

定理 4.2 ([COT])**.** 次のエルミートな, 右 R_n-加群同型が存在する

$$\mathrm{Hom}\big(H_*(S^3 \setminus K; R_n),\ R_n/\Delta\big) \cong H_*(S^3 \setminus K; R_n).$$

ちなみに, この高次ペアリングは非可換環論の単因子論を用いて, 研究できる ([Co] 参照).

ただし, 非可換の議論なので, このペアリングから良い数を取り出すには困難が伴い, 工夫を要する (可解性の難しさ). さらに, このペアリングからボルディズム不変量を上記 filter に沿って抽出するには, 色々と用語や条件を課さないといけなく難しい. 例えば, ボルディズム不変量からの計算可能そうな量は, 可解商の群環を完備化したフォンノイマン環による符号数 $\mathbb{R}$ ぐらいである. そのため, この符号数も解析的で計算例はほぼ皆無であった. なお, 上記の途中で局所化をとったが, 商体を取らないで交差形式を記述しようとすると, さらに内容が難しくなる ([COT] の後半を参照).

そこで筆者は, 高次 Blanchfield ペアリングを結び目図式から計算可能にするよう試んでいる. その基本方針は, 相対カップ積への帰着である. 実際, もしこの帰着が成功すれば, 定理 2.2 から計算可能になる. 研究の現段階では, 上記のフィルター順に敢行し, $n = 2$ における結果の一部をえた. [COT] の最終章で「$n = 2$ の時, Casson-Gordon 符号数 [CG] という古典的量が高次ペアリングに含まれる」事が示されている. これに対し,

定理 4.3 (N.)**.** "Casson-Gordon 符号数の差分" に関して, 計算機にかけられる線形代数的で図的計算法を与えた.

しかし当符号数の定義が長い為, この結果も短くない (途中, Atiyah-Singer G-符号数定理や符号数の差分 [Neu] も使う). 近々論文が出る筈なので, 詳細を知りたい方はそちらを御笑覧下さい.

A　定理 2.2 や本研究の応用例

講演後の質疑応答で「応用は？」とのご質問を受けたので, 幾らか例示しようと思います.

例 A.1 (実 3 次元多様体における捩れアレクサンダー多項式). まずは, X が閉 3 次元多様体で, 局所系が線形表現となる研究について言及する. 記号でかけば, G が $GL_n(\mathbb{F}[t^{\pm 1}])$ となり, M は $(\mathbb{F}[t^{\pm 1}])^n$ となる. この時, 局所系ホモロジー $H_1(X, \partial X; M)$ の order $\Delta \in \mathbb{F}[t^{\pm 1}]$ がよく研究され, 捩れアレクサンダー多項式という. 詳細は, 概説 [FV, Hil] を参照の事. 例えば, X のファイバー性を detect したり, $S^1 \times X$ にシンプレクティック構造が入ることの必要十分条件も与えられている.

こういった業績とは一方で, そのホモロジー上への双線形型式を誰もうまく定式化してなかったようだ (水面下で問題であったようだが $\cdot\cdot$). しかし, 筆者 [N2] は, X が絡み目補空間の場合に初めて成功した. ポイントは, ホモロジーからカップ積の帰着であったが, 詳細は省く.

例 A.2 (球面上 4 次元 Lefschetz 束の不変量). 球面上 4 次元 Lefschetz 束とは, 大まかに球面上の有限個の “Lefschetz 型特異点” を許した, ファイバー束の事」である (松本幸夫氏により導入. 詳細は [Mat]). それは, 閉 4 次元多様体から 2 次元球面の写像で表される ($E \to S^2$ みたいに). この概念は楕円曲面のある種の一般化であって, 4=2+2 次元の調子で研究できる. 微分多様体やシンプレクティック多様体の例を作るのに役立ったりする.

しかし, 不変量は余りなかったようである. そこで論文 [N3] では, 次のような感じで不変量を作ってみた. まず Hopf 束 $p : S^3 \to S^2$ をおく. すると, p で Lefschetz 束を S^3 にひき戻すと, 特異点が S^3 内の絡み目 L に見える. なので「$S^3 \setminus L$ のモノドロミーの不変量を, Lefschetz 束の不変量とみなそう」とした. 非常にナイーブな考えだけれども, 新しかったようである (学部の基本的内容なのに, 着目されていない現状は時にある. ですので, 学部の基礎学習と復習は大切と思います). 実際, 話がうまくいって, 新しく可算的に分類できた例を与えたりした.

例 A.3 (古典 Blanchfield ペアリングの計算). 定理 3.3 の成果を示す例として, トーラス結び目

$$X = S^3 \setminus T_{m,n} := \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \ \mid \ |z|^2 + |w|^2 = 1, \ z^m + w^n \neq 1 \ \}$$

の Bl_K を, 筆者は <u>初めて</u> 決定できた. ここで事実として, 等式 $\Delta_K = (t^{nm} - 1)(t - 1)/\big((t^n - 1)(t^m - 1)\big)$ と Alexander 加群の形 $\mathbb{Z}[t]/(\Delta_K)$ を認めておこう [6]. そこで示したことは以下の様 :

定理 A.4. $an + bm = 1$ となる整数 $(n, m, a, b) \in \mathbb{Z}^4$ を固定し, $K = T_{m,n}$ とする. この時, 等式

$$\mathrm{Bl}_K(y_1, y_2) = \frac{nm}{(1 + t^{-1})(1 - t^{bm})(1 - t^{an})} \cdot \bar{y}_1 y_2 \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(\Delta_K),$$

が成立する. ここで $y_1, \ y_2 \in H_1(S^3 \setminus T_{m,n}; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]) \cong \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(\Delta_K)$ とした.

なお既存の計算法 ([Hil] 参照) で何故計算できなかったのか言及しておこう. その方法は “Seifert 曲面” に依拠したものだった為, 種数が高い ($K = T_{m,n}$ の場合 $(n - 1)(m - 1)/2$ が必要) と計算が難しかったと思われる. しかし定理 3.3 では Seifert 曲面が全く必要ないため, 定理 A.4 の証明は 1 頁内で納まるほど簡潔になった.

[6] 計算法は [河内 2] を参照. なおトーラス結び目は簡単そうに見えて意外と難しい対象である. 例えば, 種数に関する有名なミルナー予想. 他に, 「$\Delta_K = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t^i \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ と展開すると, $a_i \in \{0, 1, -1\}$ となる」という数論的な定理は, Heegarrd Floer ホモロジーを用いた証明しかない.

参考文献

[Bla] R. Blanchfield, *Intersection theory of manifolds with operators with applications to knot theory*, Ann. of Math. **65**: (1957) 340–356.

[Bro] K. S. Brown, *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics, **87**, Springer-Verlag, New York, 1994.

[CG] A. J. Casson, C. McA. Gordon, *Cobordism of classical knots*, mimeographed notes (1975)

[CJKLS] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 3947–3989.

[Co] T. D. Cochran, *Noncommutative knot theory* , Algebr. Geom. Topol. **4** (2004), 347–398.

[CG] A. J. Casson, C. McA. Gordon, *Cobordism of classical knots*, mimeographed notes (1975)

[COT] T. D. Cochran, K. Orr, P. Teichner, *Knot concordance, whitney towers and L_2-signatures*, Ann. of Math. **157** (2003) 433–519.

[Die] J. Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology, 1900–1960*, Birkhäuser Boston. 1988.

[FV] S. Friedl, S. Vidussi, *A survey of twisted Alexander polynomials*, The mathematics of knots, 45–94, Contrib. Math. Comput. Sci., **1**, Springer, Heidelberg, 2011.

[Go] W. Goldman, *Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations,* Invent. math. **85** (1986) 263–302.

[Gu] S. Gukov, *Three-Dimensional Quantum Gravity, Chern-Simons Theory, and the A-Polynomial*, Commun. Math. Phys. **255** (2005), 577–627.

[田村] 田村一郎, **微分位相幾何学**, 岩波講座 基礎数学

[服部] 服部晶夫, **位相幾何学**, 岩波講座 基礎数学

[Hil] J. Hillman, *Algebraic invariants of links*, 2-nd ed. Series on Knots and everything. **32** World Scientiffc (2002).

[河内 1] 河内明夫 (編集), **結び目理論**, シュプリンガー・フェアラーク東京.

[河内 2] 河内明夫, **線形代数からホモロジーへ**, 倍風館

[Ka] A. Kawauchi, *Three dualities on the integral homology of infinite cyclic coverings of manifolds*, Osaka J. Math. **23** (1986), 633–651.

[Mat] Y. Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two – a topological approach*, Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on Topology and Teichmuller Spaces, ed. Sadayoshi Kojima et al., World Scientific (1996), 123–148.

[NS] S. Naik, T. Stanford, *A move on diagrams that generators S-equivalence of knots*, J. Knot Theory Ramifications **12** (2003) 717–724.

[Neu] W. Neumann, *Signature related invariants of manifolds-I. Monodromy and γ-invariants*, Topology **18** (1979), 147–172.

[N1] T. Nosaka, *Quandle cocycles from invariant theory*, Advances in Mathematics, **245** (2013) 423–438.

[N2] ———, *Relative cup products and twisted Blanchfield pairings of knots*, preprint

[N3] ———, *Bilinear-form invariants of Lefschetz fibrations over the 2-sphere*, preprint

[M] J. W. Milnor, *Infinite cyclic coverings*, Conference on the Topology of Manifolds (Michigan State Univ., E. Lansing, Mich., 1967), Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Mass., (1968) 115–133.

[R] A.A. Ranicki, *High-dimensional Knot Theory: Algebraic Surgery in Codimension 2*