遅延微分方程式とある超越方程式の根について

西口 純矢*

京都大学 大学院理学研究科 数学教室，2015 年 2 月

0　はじめに

本講演では，未知関数の導値がその過去の値にも依存する微分方程式である「遅延微分方程式」の紹介と，その定数解の漸近安定性を決定する「特性方程式」の解析について話した．この文書は上記についての報告である．

1　「遅れ」と微分方程式

「遅れ」をもつ微分方程式である「遅延微分方程式」のダイナミクスは通常の微分方程式のそれとは決定的に異なる．この意味で，「微分方程式とは何か」という問いを再考することには意味がある．

1.1　微分方程式

関数のある点における微分とは，その点における無限小変化に対してその関数がどのように無限小変化をするかという対応を表す線形作用素である．したがって，（通常の）微分方程式とは，あえて数学的に厳密な言い方をしなければ，ある変数を内包する未知の量がどのように無限小変化をするかというルールを記述するものである．微分方程式は変数が 1 つの実変数のときは常微分方程式 (ordinary differential equations; ODEs)，複数個の実変数のときは偏微分方程式とよばれる．内包された独立変数に対してその量である従属変数を対応させることにより未知関数が生じる．この意味で微分方程式は数学的には未知関数の偏導関数を含む関数方程式であると言える．

ここでは，未知の量を 1 つの実の独立変数 ξ の関数 $\xi \mapsto u(\xi)$ として考えることに意味があるという状況を考える．たとえば，自然法則や現実のモデルを微分方程式によって記述するときには「時間」という変数 t が含まれる．このような場合に興味のあることは，時間 t の変化で未知の量がどのように変化するかということである．これは，数学的には微分方程式の解が t の関数としてどのような関数であるかという問いに答えることに他ならない．このようにして，抽象空間 X と未知関数 $\xi \mapsto u(\xi) \in X$ に対して

$$u'(\xi) = f(\xi, u(\xi)) \quad (f\colon \mathbb{R} \times X \to \text{「}X\text{ のベクトル空間」})$$

という ODE を得る．ただし，$u'(\xi)$ は関数 $\xi \mapsto u(\xi) \in X$ の ξ における導値である．

*j-nishi@math.kyoto-u.ac.jp

1.2　関数微分方程式

n 次元実 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ における自励系の ODE は典型的である．このような方程式はスカラー量やそれらの結合系，またはベクトル量の無限小変化を記述するときに現れる．

$\mathbb{R}^n$ 上の開集合上で定義されたベクトル場 f が定める ODE $u'(\xi) = f(u(\xi))$ は，初期条件 $u(0) = x \in \mathbb{E}^n$ を考えることにより $\mathbb{R}^n$ 上の力学系を定める．関数微分方程式はこのような力学系理論の進展の中で認識されたものである．

定義 1 (cf. Hale & Verduyn Lunel [1])**.** τ を正の数とする．関数 $F\colon C([-\tau,0],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ に対して，関数 $u(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ を未知関数とする微分方程式

$$u'(\xi) = F(u_\xi) \tag{1}$$

を自励系の遅れ型関数微分方程式 (retarded functional differential equations; RFDEs) とよぶ．

ここで，$C([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$ は $[-\tau,0]$ から $\mathbb{R}^n$ への連続写像全体のなす線型空間であり，$u_\xi \in C([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$ は $u_\xi(\theta) = u(\xi+\theta)$ $(\theta \in [-\tau,0])$ で定義される．

RFDE (1) においては，ξ における導値 $u'(\xi)$ は ξ における値 $u(\xi)$ ではなく，$[\xi-\tau,\xi]$ における未知関数の情報に依存している．すなわち，(1) の右辺の F は u_ξ の汎関数であり，関数微分方程式は通常の微分方程式とは異なる関数方程式である．

RFDE は遅れをもつ微分方程式である遅延微分方程式 (delay differential equations; DDEs) の数学的定式化である．Wright の方程式 [2]

$$y'(x) = -\alpha y(x-1)\{1+y(x)\} \quad (\alpha > 0 \text{ はパラメータ})$$

は 1 つの例である．ここで x と y はそれぞれ実の独立変数と従属変数で，$y'(x)$ は $y(x)$ だけでなく $y(x-1)$ にも依存するという意味で遅れをもつ．これが RFDE の例であるということを見るには，対応するベクトル値汎関数 F を

$$F(\phi) = -\alpha\phi(-1)\{1+\phi(0)\}$$

と定めればよい．ただし，$\tau = 1$ で ϕ は $C([-1,0],\mathbb{R})$ の元である．

方程式における遅れは物理学的または生物学的な由来をもつ．たとえば，ニューラルネットワークのように空間離散的に結合した系における情報伝達による遅れや，個体数の増減において子供が大人に成長するまでの遅れなどがある．

Wright の方程式における遅れは定数かつ離散的である．他には定数ではない状態依存の遅れや，積分のような分布的な遅れもある．

RFDE (1) に対して，汎関数 F が局所 Lipschitz の仮定の下で，初期条件 $u_0 = \phi$ $(\phi \in C([-\tau,0],\mathbb{R}^n))$ の下での初期値問題は well-posed である．これにより (1) は $C([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$ 上の力学系を定める．このダイナミクスは無限次元であり，偏微分方程式が定めるそれとは異なるものである．

2　定数解の漸近安定性

1 つの定数遅れをもつ滑らかな遅延微分方程式

$$x'(t) = f(x(t), x(t-\tau)) \quad (f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \tau > 0) \tag{2}$$

の定数解 $x^*(t) \equiv p \in \mathbb{R}^n$ の漸近安定性のパラメータ依存性について考える．これは，ベクトル値汎関数 $F(\phi) = f(\phi(0), \phi(-\tau))$ により RFDE である．汎関数の形は簡単であり，F は Frechét 微分の意味でのよい滑らかさをもっている．この意味で DDE (2) については一般論の枠組みで多くのことがわかっている．

2.1 特性方程式の超越性

定数解の漸近安定性は次の特性方程式

$$\det(\lambda I + A - \mathrm{e}^{-\lambda\tau} B) = 0 \quad (I \text{ は } n \times n \text{ の単位行列}) \tag{3}$$

の根の配置により決定される．ここで $A = -D_1 f(p, p)$, $B = D_2 f(p, p)$ であり，偏微分に関する Jacobi 行列である．方程式 (3) は λ の超越方程式であり無限個の根をもつ．これは通常の ODE の特性方程式が代数方程式であることとの著しい差異である．

ここでは A と B は同時三角化可能であるということを仮定する．すると，方程式 (3) は超越方程式

$$\lambda + \alpha - \beta \mathrm{e}^{-\lambda\tau} = 0 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \tag{4}$$

に帰着される．ただし，α と β はそれぞれ A と B の固有値である．定数解が漸近安定であるための必要十分条件は (3) のすべての根の実部が負であることである．したがって，方程式 (4) のすべての根の実部が負であるための α, β, τ に関する必要十分条件を求めることであることが目標である．$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ のときは Hayes [3] が調べた．著者が知る限りでは，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ の場合はまだ知られていない．

2.2 Lambert の W 関数

方程式 (4) を解析するアイデアは Lambert の W 関数のある座標系における「グラフのような表示」を用いることである．ここで，Lambert の W 関数とは複素関数 $z \mapsto z\mathrm{e}^z$ の多価逆関数である：

$$W(\zeta) = \{ z \in \mathbb{C} : z\mathrm{e}^z = \zeta \} \quad (\zeta \in \mathbb{C}).$$

W 関数を用いると方程式 (4) の根全体の集合は $(1/\tau)W(\beta\tau\mathrm{e}^{\alpha\tau}) - \alpha$ に等しい．

定義 2. f を複素関数とし，D を複素平面の部分集合とする．実数値関数 g が存在して，

$$f(x + \mathrm{i}y) = x + \mathrm{i}g(x, y) \quad (x + \mathrm{i}y \in D)$$

が成り立つとき，f は D 上で graph-like であるという．

一般の関数が graph-like であることは当然のことながら期待できない．重要なことは，W 関数の座標表示が graph-like であるような複素平面の座標系を求めることである．

定義 3. $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して，$\mathrm{Arg}_{\mathrm{W}}(z)$ を

$$\mathrm{Arg}_{\mathrm{W}}(z) = \begin{cases} \{\pi, -\pi\} & (z = -1), \\ \{-\pi\} & (z < -1), \\ \{\mathrm{Arg}(z)\} & (z \notin (-\infty, -1]) \end{cases}$$

で定める．

これを用いて，$h(z)$ を $h(z) = \mathrm{Arg_W}(z) + \Im(z)$ で定める．また，$\rho > 0$ に対して $H(\rho, x)$ を

$$H(\rho, x) = h(x + \mathrm{i}\gamma(x, \rho)) \cup h(x - \mathrm{i}\gamma(x, \rho))$$

で定める．ここで，$\gamma(x, \rho) = \sqrt{(\rho \mathrm{e}^{-x})^2 - x^2}$ である．

補題 1. $H(\rho, \cdot)$ の逆関数 $H^{-1}(\rho, \cdot)$ は 1 価関数である．$[0, +\infty)$ 上で単調減少かつ $(-\infty, 0]$ 上で単調増加である．

$m \in \mathbb{Z}$ に対して，部分集合 R_m を $R_m = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : h(z) \subset (-\pi, \pi] + 2m\pi\}$ と定める．

命題 1. $\zeta \neq 0$ に対して，$W(\zeta) \cap R_m$ は 1 点集合である．$W_m(\zeta)$ を $W(\zeta) \cap R_m = \{W_m(\zeta)\}$ で定めると，

$$W_m(\zeta) = H^{-1}(|\zeta|, \mathrm{Arg}(\zeta) + 2m\pi) + \mathrm{sgn}(\mathrm{Arg}(\zeta) + 2m\pi) \cdot \mathrm{i}\gamma(H^{-1}(|\zeta|, \mathrm{Arg}(\zeta) + 2m\pi), |\zeta|)$$

が成り立つ．

ここで sgn は符号関数で，$x > 0$ のとき $\mathrm{sgn}(x) = 1$，$x < 0$ のとき $\mathrm{sgn}(x) = -1$ で $\mathrm{sgn}(0) = 0$ である．これより，$\Re(W_0(\zeta)) = \max_{m \in \mathbb{Z}} \Re(W_m(\zeta))$ がわかる．ただし，W_0 が最も右側にあること自体は Shinozaki & Mori [4] によって得られている．

2.3 必要十分条件

命題 1 を用いて次を示すことができる．

定理 1. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ とし，$\beta \neq 0$ とする．方程式 (4) のすべての根の実部が負であるための必要十分条件は，(i) $\Re(a) > |b|$，または (ii) $-|b| < \Re(a) \leq |b|$ かつ

$$\mathrm{Arccos}\big(\cos(\Im(\alpha)\tau + \mathrm{Arg}(\beta))\big) > \mathrm{Arccos}(\Re(\alpha)/|\beta|) + \tau\sqrt{|\beta|^2 - \Re(\alpha)^2} \tag{5}$$

が成り立つことである．

α, β を固定して $\tau > 0$ をパラメータとしたときに定数解の漸近安定性がどのように変わるかということも重要である．これは不等式 (5) を τ の不等式と見ることである．これについて次を得る．

定理 2. $-|b| < \Re(a) \leq |b|, \Im(\alpha) > 0$ かつ $|\alpha| > |\beta|$ と仮定する．このとき，方程式 (4) のすべての根の実部が負である $\tau > 0$ が存在するための α と β に関する必要十分条件は

(i) $\mathrm{Arg}(\beta) < 0$ かつ $\Re(\alpha) > \Re(\beta)$，または

(ii) 正の整数 N が存在して，$\tau_N(\alpha, \beta) < h_1(|\beta|, \Re(\alpha))$

となることである．

注 1. τ に関する条件も得られるがここでは省略する．

ここで，

$$\tau_N(\alpha, \beta) = \frac{N\pi - \mathrm{Arg}(\beta)}{\Im(\alpha)}, \quad h_1(\rho, x) = \frac{\pi - \mathrm{Arccos}(x/\rho)}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}$$

である．

3　遅延フィードバック制御への応用

遅延フィードバック制御 (delayed feedback control; DFC) は ODE の軌道不安定な周期解を遅延フィードバック項を加えることで安定化させる手法であり，Pyragas [5] によって提案された．$\mathbb{R}^n$ 上の滑らかな ODE $x'(t) = f(x(t))$ と軌道不安定な周期解 $\gamma(t)$ に対して，DDE

$$x'(t) = f(x(t)) + K(x(t-\tau) - x(t)) \tag{6}$$

を考える．ここで，K は $n \times n$ の実行列で，$\gamma(t)$ の周期 T に対して $\tau = mT$ $(m \in \mathbb{Z})$ である．$\gamma(t)$ は方程式 (6) の周期解でもある．DFC の目標は，$\gamma(t)$ が (6) の軌道安定な周期解となるような K と τ を見つけることである．ここでは，DFC による不安定な定常解 $x^*(t) \equiv p$ の安定化を考える．著者の知る限りではこの問題は未解決である．

定理 2 より次を示すことができる．

定理 3. p の実部が 0 以上の固有値全体の集合が $\{\mu, \bar{\mu}\}$ $(\mu \notin \mathbb{R})$ であるとする．このとき，$x^*(t)$ を DFC で安定化させることができる．

参考文献

[1] Hale, J. K. and S. M. Verduyn Lunel (1993): Introduction to functional differential equations. Applied Mathematical Sciences **99**. (Springer-Verlag, New York).

[2] Wright, E. M. (1955): A non-linear difference-differential equation. J. Reine Angew. Math. **194**, 66–87.

[3] Hayes, N. D. (1950): Roots of the transcendental equation associated with a certain differential-difference equation. J. London Math. Soc. **25**, 226–232.

[4] Shinozaki, H. and T. Mori (2006): Robust stability analysis of linear time-delay systems by Lambert W function: Some extreme point results. Automatica **42**, 1791–1799.

[5] Pyragas, K. (1992): Continuous control of chaos by self-controlling feedback. Phys. Lett. A **170**, 421–428.