

曲面結び目のカンドルコサイクル不変量の多重化公式

成瀬 透*

京都大学 数理解析研究所 M2, 2015 年 2 月

1 序文

曲面結び目 (surface knot) とは, 連結な有向閉曲面の 4 次元 Euclid 空間への滑らかな埋め込みの像のことをいう. 1 次元結び目 (1 次元球面 S^1 の 3 次元 Euclid 空間への滑らかな埋め込みの像) の場合と同様に, 曲面結び目の不変量として補空間の基本群や Alexander 多項式を定義することができる. 1990 年代に (1 次元結び目や) 曲面結び目のカンドルコサイクル不変量 (quandle cocycle invariant) が定義された ([CJKLS99, CJKLS03]). 曲面結び目のカンドルコサイクル不変量は, 最小三重点数の評価を与えるなど曲面結び目理論に様々な応用をもたらす有益な不変量である ([SS]). 本稿では曲面結び目のカンドルコサイクル不変量の多重化公式を概説する.

2 準備

この節ではカンドル (ラック) や曲面結び目のカンドルコサイクル不変量を復習する.

集合 X とその二項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$ が

(R1) 任意の $y, z \in X$ に対して, $x * y = z$ を満たす $x \in X$ が唯一つ存在する.

(R2) 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ である.

を満たすとき, $(X, *)$ をラック (rack) という. 更に次の

(Q) 任意の $x \in X$ に対して, $x * x = x$ である.

を満たすときカンドル (quandle) という. 特に X が有限集合のときは有限ラック, 有限カンドルという.

詳細は省くが, (Q),(R1),(R2) は 1 次元結び目の Reidemeister 移動 I,II,III とそれぞれ対応している. ここで Reidemeister 移動とは, 同値な 1 次元結び目を表すダイアグラムの局所移動である. また, 枠つき 1 次元結び目 (アニュラスの \mathbb{R}^3 への滑らかな埋め込みの像) の Reidemeister 移動は 3 つの Reidemeister 移動の内 Reidemeister 移動 I をある別の局所移動で置き換えたものとして得られるが, この別の局所移動は (R1),(R2) で対応づけすることができる. (詳しくは結び目の教科書を参考のこと.) つまり, カンドルは結び目理論と相性が良く, ラックは枠つき結び目理論と相性が良いのである.

一般に群 G が与えられたとき, $x * y := y^{-1}xy$ ($x, y \in G$) と定めることにより $(G, *)$ はカンドルであることが直ちに分かる. つまりカンドルとは, 群演算を忘れる代わりに「共役をとる」という演算を残した代数と思える. 例えば, 位数 $2n$ の二面体群 D_n の正 n 角形の反転を表す元からなる共役類や正四面体群 ($\cong 4$ 次の交代群) の元の数 4 であるような共役類は先の演算を入れることによりカンドルであるが, それぞれ二面体カンドル (dihedral quandle), 四面体カンドル

(tetrahedral quandle) という. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (n は正の整数) に二項演算 $*$ を $x * y = x + 1$ と定義したものはラックであるが, これを巡回ラック (cyclic rack) という.

紙面の都合上, カンドルコサイクル不変量は簡単に説明するだけにとどめておく. 曲面結び目のカンドルコサイクル不変量は, 曲面結び目のダイアグラムを用いて定義される状態和不変量である. 状態和のウェイトに有限カンドルのコホモロジーの 3 コサイクルが用いられる. ダイアグラムの取り方に依らないことは, 1 次元結び目であるところの Reidemeister の定理に相当する曲面結び目の Roseman の定理を用いて示される. 因みにカンドルコサイクル不変量の値は, コホモロジー類の代表元 (カンドル 3 コサイクル) の取り方に依らないことが知られている.

3 枠つき曲面結び目の線つきダイアグラムとラックコサイクル不変量

カンドルコサイクル不変量の多重化公式を与えるためには, 曲面結び目の多重化を厳密に定義する必要がある. そこで曲面結び目の多重化を厳密に扱うために枠つき曲面結び目を導入する. 第 2 節でカンドルと結び目理論が, ラックと枠つき結び目理論が相性が良いことを簡単に述べた. そこで枠つき結び目理論と相性の良いラックを用いることにより, カンドルコサイクル不変量の“枠つき結び目版”である枠つき曲面結び目の不変量 (ラックコサイクル不変量) を定義する. カンドルコサイクル不変量と同様に定義するために枠つき曲面結び目の図式である線つきダイアグラムを導入する.

まず, 枠つき曲面結び目について説明しよう. $F \subset \mathbb{R}^4$ を曲面結び目とする. F の単位法バンドル νF の切断 $s : F \rightarrow \nu F$ を F の枠 (framing) という. νF は自明バンドルであることが知られているため, F にはいつでも枠は存在する. 曲面結び目と枠の組 $\mathcal{F} = (F, s)$ を枠つき曲面結び目 (framed surface knot) という. 1 次元結び目の枠は $H^1(S^1; \mathbb{Z})$ の元と特徴づけられているが, 曲面結び目の枠にも同様に $H^1(F; \mathbb{Z})$ の元と特徴づけることができる. 枠を指定することによって曲面結び目の多重化の“方向”を決めることができるのである.

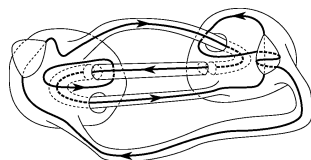


図 3.1: 線つきダイアグラムの例

次に, 線つきダイアグラムについて説明しよう. 線つきダイアグラム (diagram with arcs) とは, 曲面結び目ダイアグラムとそのダイアグラム上の曲線の組であってある条件を満たすものである. 図 3.1 は線つきダイアグラムの例である. 実は任意の枠つき曲面結び目が線つきダイアグラムをもち, 線つきダイアグラムが枠つき曲面結び目を表している ([N] 参照のこと). このことから線つきダイアグラムを簡単に述べるとすると, 曲面結び目ダイアグラム上に枠の情報を「線」として付随させたものといえよう. 曲面結び目には 1 次元結び目であるところの Reidemeister の定理に相当する Roseman の定理がある. 著者はその Roseman の定理に相当する次の枠つき曲面結び目の定理を証明した. (証明は [N] を参照のこと.)

定理 3.1 ([N] 参照). $(D_1, L_1), (D_2, L_2)$ をそれぞれ枠つき曲面結び目 $(F_1, s_1), (F_2, s_2)$ の線つきダイアグラムとする. $(F_1, s_1), (F_2, s_2)$ が同値な枠つき曲面結び目であることの必要十分条件は,

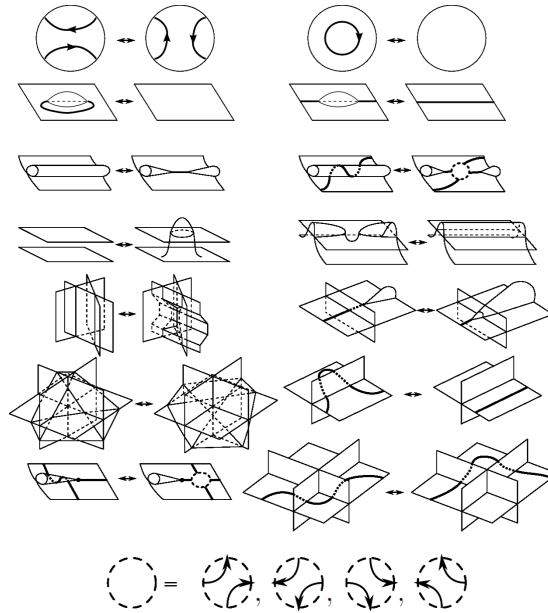


図 3.2: 「線」のかき換え (最上段) と線つきダイアグラムの局所変形 (2 段目以降). ただし, シートの上下の情報, 「線」の向きは省略している.

$(D_1, L_1), (D_2, L_2)$ が図 3.2 の局所変形とシートのアンビエントイソトピーと「線」のかき換え, \mathbb{R}^3 のアンビエントイソトピーの有限の列で互いに移りあうことである.

枠つき曲面結び目のラックコサイクル不変量 (rack cocycle invariant) の定義の概略を説明する. (詳細は [N] を参照のこと.) 枠つき曲面結び目のラックコサイクル不変量は, カンドルコサイクル不変量と同様状態和の形で定義される. カンドルコサイクル不変量との主な相違点は, カンドル 3 コサイクルの代わりに有限ラックのラック 3 コサイクルを用いている点とウエイトを乗せる点がカンドルコサイクル不変量の場合と比べて多い点が挙げられる. ラックコサイクル不変量の不変性の証明には定理 3.1 を用いて示す. カンドルコサイクル不変量と同様, ラックコサイクル不変量の値はラックコホモロジー類の代表元の取り方に依らない.

曲面結び目 F (枠つき曲面結び目 \mathcal{F}) のカンドル彩色数 (ラック彩色数) を $\text{col}(F)$ ($\text{col}(\mathcal{F})$) とかき, カンドル (ラック) コサイクル不変量を $\Phi_f(F)$ ($\Phi_f(\mathcal{F})$) とかくことにする. ただし, f はカンドル 3 コサイクル (ラック 3 コサイクル) とする. 特にカンドル 3 コサイクル (ラック 3 コサイクル) f が自明なものであるとき, カンドルコサイクル不変量 (ラックコサイクル不変量) はカンドル彩色数 (ラック彩色数) と一致することが知られている. これより, カンドルコサイクル不変量 (ラックコサイクル不変量) はカンドル彩色数 (ラック彩色数) の改良版であるといえる.

4 カンドルコサイクル不変量の多重化公式

この節では, まず一般の有限カンドルを用いた場合のカンドルコサイクル不変量の多重化公式 (定理 4.1) を述べる. 特に有限カンドルとして奇素数 p 位数の二面体カンドル R_p の場合 (定理 4.3), 四面体カンドル Q_4 の場合 (定理 4.4) について得られた結果を説明する.

曲面結び目の一般の有限カンドルを用いたカンドルコサイクル不変量の多重化公式は次のとおりである.

定理 4.1 ([N]). $\mathcal{F} = (F, s)$ を枠つき曲面結び目とし, $\mathcal{F}^{(n)}$ を枠 s に沿って n 重化して得られる曲面絡み目とする. X を有限カンドル, f を X のカンドル 3 コサイクルとする. このとき

$$\text{col}_X(\mathcal{F}^{(n)}) = c_{n,1} \cdot \text{col}_{Y_1}(\mathcal{F}) + \cdots + c_{n,m} \cdot \text{col}_{Y_m}(\mathcal{F})$$

$$\Phi_f(\mathcal{F}^{(n)}) = \sum_{i_{n,1}=1}^{c_{n,1}} \Phi_{\tilde{f}_{i_{n,1}}}(\mathcal{F}) + \cdots + \sum_{i_{n,m}=1}^{c_{n,m}} \Phi_{\tilde{f}_{i_{n,m}}}(\mathcal{F})$$

である. ここで, X^n は通常の積集合に入れる演算とは別の演算を入れたラックであり, $X^n = c_{n,1}Y_1 \sqcup \cdots \sqcup c_{n,m}Y_m$ と軌道分解されているとする (注意 4.2 参照). \tilde{f} は f を用いて定義される X^n のラック 3 コサイクルである. また $\tilde{f}_{i_{n,k}}$ は, X^n の連結ラックへの分解に現れる $c_{n,k}$ 個の Y_k と同型なラックに番号を定めたときの \tilde{f} の $i_{n,k}$ 番目の Y_k への制限としている ($i_{n,k} = 1, \dots, c_{n,k}$).

注意 4.2. 実は X^n のラック演算の定義から, X^n の内部自己同型群 $\text{Inn}(X^n)$ は X の内部自己同型群 $\text{Inn}(X)$ の部分群となる. この事実と X の有限性から, X^n ($n = 1, 2, \dots$) を連結ラックに分解したときに現れる連結ラックは有限種類しか存在しないことが分かる. 即ちある Y_1, \dots, Y_m が存在して, X^n を連結ラックへの分解が $X^n \cong c_{n,1} \cdot Y_1 \sqcup \cdots \sqcup c_{n,m} \cdot Y_m$ と表せる. 詳細は [N] を参照のこと.

この定理は, $\mathcal{F}^{(n)}$ のカンドルコサイクル不変量の値が n に依らない有限種類のラックを用いた \mathcal{F} のラックコサイクル不変量で記述されることを意味している. つまり定理 4.1 は, X^n の軌道分解を決定することがカンドルコサイクル不変量の多重化公式を求める上で重要であることを示唆している.

次に奇素数 p 位数の二面体カンドル R_p 及び四面体カンドル Q_4 について得られた結果を述べる. まず, R_p の場合について述べる. 証明は [N] を参照されたい.

定理 4.3 ([N]). $\mathcal{F} = (F, s)$ を枠つき曲面結び目とし, φ を望月 3 コサイクルとする. ([Mo])

(1) n が奇数のとき,

$$\text{col}_{R_p}(\mathcal{F}^{(n)}) = \begin{cases} p^{n-1} \text{col}_{R_p}(F) & (\text{枠 } s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } 2 \text{ で割り切れるとき}) \\ \text{col}_{R_p}(F) & (\text{枠 } s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } 2 \text{ で割り切れないとき}) \end{cases}$$

である.

n が偶数のとき,

$$\text{col}_{R_p}(\mathcal{F}^{(n)}) = \begin{cases} p^n & (\text{枠 } s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } p \text{ で割り切れるとき}) \\ p^{n-1} & (\text{枠 } s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } p \text{ で割り切れないとき}) \end{cases}$$

である.

(2) n が奇数であるとき,

$$\Phi_\varphi(\mathcal{F}^{(n)}) = \begin{cases} p^{n-1} \Phi_\varphi(F)|_{v \mapsto v^n} & (\text{枠 } s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } 2 \text{ で割り切れるとき}) \\ \Phi_\varphi(F)|_{v \mapsto v^n} & (\text{枠 } s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } 2 \text{ で割り切れないとき}) \end{cases}$$

である.

定理 4.3 より, R_p 彩色数の多重化公式については完全に決定できた. また, 望月 3 コサイクルが $H_Q^3(R_p; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の生成元であること ([Mo]) に注意すると, カンドルコサイクル不変量の奇数重化公式については完全に決定できた.

次に, Q_4 の場合に述べる. Q_4 彩色数の多重化公式は次の通りである. 証明は [N] を参照されたい.

定理 4.4 ([N]). $\mathcal{F} = (F, s)$ を枠つき曲面結び目とする. このとき,

n が 3 で割り切れないとき,

$$\text{col}_{Q_4}(\mathcal{F}^{(n)}) = \text{col}_{Q_4}(F) + \frac{4^{n-1} - 1}{3} \cdot \text{col}_Z(\mathcal{F}) \quad (n \text{ が } 3 \text{ で割り切れないとき})$$

である. ここで Z は $\{(x, y) \in Q_4^2 | x \neq y\}$ にラック演算を $(x, y) * (a, b) := (x * a, y * a)$ と定義した位数 12 の連結ラックである.

n が 3 で割り切れるとき,

$$\text{col}_{Q_4}(\mathcal{F}^{(n)}) = \begin{cases} 4^{n-1} & (s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } 2 \text{ で割り切れないとき}) \\ 4^n & (s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } 2 \text{ で割り切れるとき}) \end{cases}$$

である.

謝辞 「第 12 回 城崎新人セミナー」を企画・運営していただいた運営委員の皆様へ深く感謝申し上げます.

参考文献

- [CJKLS99] J.S.Carter, D.Jelsovsky, S.Kamada, L.Langford, M.Saito, *State-sum invariants of knotted curves and surfaces from quandle cohomology*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. **5** (1999) 146–156
- [CJKLS03] J.S.Carter, D.Jelsovsky, S.Kamada, L.Langford, M.Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3947–3989
- [Mo] T.Mochizuki, *Some calculations of cohomology groups of finite Alexander quandles*, J.Pure Appl. Algebra **179** (2003) 287–330
- [N] 成瀬 透, “曲面結び目のカンドルコサイクル不変量の多重化公式”, 修士論文, 京都大学数理解析研究所, 2015 年 1 月 <http://hdl.handle.net/2433/194277>
- [SS] S.Satoh, A.Shima, *The 2-twist spun trefoil has the triple point number four*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004) 1007–1024