Some topics on nonlinear dispersive equations on the torus

岸本 展 * (京都大学数理解析研究所，2015 年 2 月)

1. イントロ

本稿では時間発展を伴う**非線形**な偏微分方程式のなかで**分散型**と呼ばれるクラスのものに焦点を当て，初期値問題の一意可解性などについて考える．非線形分散型方程式の代表的なものとしては，量子力学や非線形光学等で現れる**非線形** Schrödinger **方程式**(略して NLS)：

$$\begin{cases} \partial_t u = i\Delta u + |u|^2 u, & u = u(t,x) : [0,T] \times X^d \to \mathbb{C}, \\ u(0,\cdot) = \phi(\cdot), & \phi = \phi(x) : X^d \to \mathbb{C} \end{cases}$$

や，水深の浅い場所での波の伝播のモデルとされる KdV 方程式が挙げられる．ここで d は空間次元，X^d は空間変数の動く領域を表し，本稿では X^d として Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ または d 次元トーラス $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/2\pi\mathbb{Z}^d$ を主に考える．矩形領域 $[0,a_1] \times [0,a_2] \times \cdots \times [0,a_d]$ で各変数について周期境界条件を課した初期値・境界値問題は，適当にスケール変換することによりトーラス上の初期値問題とみなせる．$\Delta := \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2$ は d 次元 Laplace 作用素を表し，$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_{x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}$ 等と略記する．

このような設定では Fourier 解析により具体的な計算ができるので多くの研究がなされている．とりわけトーラス上の問題は数値シミュレーションの観点からも重要な意味を持つだけでなく，Fourier 変換すると離散変数（Fourier 級数）となり計算がしやすい．その反面，トーラスのようにコンパクトな空間では分散型方程式の特性である “分散性による平滑化効果” が制限されるため，一般に全空間 $\mathbb{R}^d$ 上の問題とは異なる様相を呈する．特に，その解析において（初等）整数論あるいは組合せ論分野の事実を援用する必要が自然に生じる点は全空間の場合と大きく異なる．

本稿では，著者が今までに出会った偏微分方程式の解析における数論的な側面についていくつか紹介したい．数論といっても著者が理解できる程度の初等的なものであり，使う事実のほとんどは [11] に載っている．保型形式や数論幾何など現代的な難しい理論は全く用いないが，これらが偏微分方程式の研究に役立つのであればそれはまた非常に興味深い．

さて，$\mathbb{R}^d$, $\mathbb{T}^d$ 上の問題は関数解析的手法によりある程度統一的に扱うことができる．例として NLS: $\partial_t u = i\Delta u + |u|^2 u$ で空間領域が 1 次元トーラス（円周）の場合を考える．$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_n(t) e^{inx}$, $\phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}_n e^{inx}$ と Fourier 級数展開して代入し，e^{inx} の係数を比較すると，

$$\partial_t \widehat{u}_n(t) = -in^2 \widehat{u}_n(t) + \sum_{n=k-l+m} \widehat{u}_k(t)\overline{\widehat{u}_l(t)}\widehat{u}_m(t), \qquad \widehat{u}_n(0) = \widehat{\phi}_n \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

という常微分方程式となる．なお，右辺の和は $k,l,m \in \mathbb{Z}$ で $n = k - l + m$ をみたすもの全体についての和を意味する．右辺第 2 項を外力項と見てこれを解くと，

$$\widehat{u}_n(t) = e^{-in^2 t}\widehat{\phi}_n + e^{-in^2 t} \int_0^t e^{in^2 t'} \sum_{n=k-l+m} \widehat{u}_k(t')\overline{\widehat{u}_l(t')}\widehat{u}_m(t')\, dt' \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

という $\widehat{u}$ に関する積分方程式が得られる．これだけでは右辺にも未知関数 $\widehat{u}$ が含まれるが，右辺第 2 項を $N(\widehat{u},\widehat{u},\widehat{u})_n(t)$ と書き，$\widehat{u}_n^{(1)}(t) := e^{-in^2 t}\widehat{\phi}_n$,

$$\widehat{u}_n^{(m)}(t) := \sum_{m_1+m_2+m_3=m} N(\widehat{u}^{(m_1)}, \widehat{u}^{(m_2)}, \widehat{u}^{(m_3)})_n(t) \qquad (m = 3,5,7,\cdots)$$

*nobu@kurims.kyoto-u.ac.jp

とおくと，形式的には $\widehat{u}(t) := \sum_m \widehat{u}^{(m)}(t)$ が解となる（**Picard の逐次近似法**）．

あとはこの和が収束することを示せばよい．そのためには，$N(\widehat{u},\widehat{u},\widehat{u})$ による非線形効果がそれほど大きくないことを確かめる必要があるから，関数の大きさを測る枠組（**関数空間**）を適切に設定し，それを用いて非線形項を制御するための評価式を示すことになる．なお，この論法による副産物として解の一意性・初期値に対する滑らかな依存性も得られることが多い．解の一意存在及び初期値への連続依存性（$+\alpha$）といった性質をまとめて初期値問題の**適切性**という．

関数空間としては以下のノルムで定義される **Lebesgue 空間** L^p $(1 \le p \le \infty)$ や **Sobolev 空間** H^s $(s \in \mathbb{R})$ が典型例である．周期関数 $u : \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$, $u(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \widehat{u}_n e^{in\cdot x}$ の場合の定義を述べると，

$$\|u\|_{L^p} := \begin{cases} \Big(\displaystyle\int_{\mathbb{T}^d} |u(x)|^p \, dx \Big)^{1/p} & \text{if } p \neq \infty, \\ \operatorname*{ess.sup}_{x\in\mathbb{T}^d} |u(x)| & \text{if } p = \infty, \end{cases} \qquad \|u\|_{H^s} := \Big(2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} (1+|n|^2)^s |\widehat{u}_n|^2 \Big)^{1/2}.$$

ここで，Parseval の等式 $\|u\|_{L^2} = \big(2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{u}_n|^2 \big)^{1/2}$ より $L^2 = H^0$ である．また H^s において指数 s は関数の**滑らかさ**を表しており，s が大きいほど H^s ノルムの値は大きく空間としては狭くなる．

これらのノルムを用いた非線形評価式は，考える空間領域が全空間 $\mathbb{R}^d$ の場合には，分散型方程式の特性（いわゆる分散評価式や局所平滑化評価式など）を用いて純粋に解析的手法で示されることが多い．これに対し，トーラス $\mathbb{T}^d$ などのコンパクトな領域の場合は一般に分散性による平滑化が不十分で，別のアイデアが必要となる．特にトーラスの場合は数論的考察を用いた直接的な計算がしばしば有効となるのである．以下の 2 つの節で NLS を例にとって説明する．

2. 非線形 Schrödinger 方程式と Strichartz 評価式

まず全空間 $\mathbb{R}^d$ の場合を考える．$v(t,x)$ を線形 Schrödinger 方程式 $\partial_t v = i\Delta v$ の解とすると，Fourier 空間・物理空間における解の表示式から次の重要な L^2 **保存則**および**分散評価式**が従う：

$$\|v(t)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^d)} = \|v(0)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^d)}, \qquad \|v(t)\|_{L^\infty_x(\mathbb{R}^d)} \le C|t|^{-d/2} \|v(0)\|_{L^1_x(\mathbb{R}^d)}.$$

この 2 つの式より，解の全体量（L^2 ノルム）は一定であるのに対しピークの高さ（L^∞ ノルム）は時間とともに低くなることがわかる．これは，解の空間分布が時間とともに遠方へ分散して平らになっていくことを意味し，分散型 (dispersive) という名前の由来となっている．一方，これらの（不）等式から関数解析・実解析の手法を用いて次の **Strichartz 評価式**が示される：$w(t,x)$ を非斉次線形方程式 $\partial_t w = i\Delta w + F$ の解とすると，ある条件をみたす指数の組 (q,r)（admissible pair と呼ばれる）に対して

$$\|w\|_{L^q_t(\mathbb{R};L^r_x(\mathbb{R}^d))} \le C\big(\|w(0)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^d)} + \|F\|_{L^{q/(q-1)}_t(\mathbb{R};L^{r/(r-1)}_x(\mathbb{R}^d))} \big).$$

Strichartz 評価式は分散型方程式を特徴づける重要な帰結の一つであり，現在も盛んに研究されている．上記の $\mathbb{R}^d$ 上の Schrödinger 方程式に対する評価は Strichartz[18], Ginibre-Velo[10], Yajima[21], Cazenave-Weissler[5], Keel-Tao[14] らによる．

Strichartz 評価式を用いて非線形方程式の初期値問題を解くことができる．例えば $\mathbb{R}^2$ 上の場合には $(q,r) = (4,4)$ が admissible pair となり，対応する L^4-Strichartz 評価式と Hölder の不等式を組み合わせることで方程式の非線形効果を制御できて，初期値 $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ に対する適切性が示せる (Tsutsumi[20], Cazenave-Weissler[6])．一方で $s < 0$ に対して $H^s(\mathbb{R}^2)$ の初期値を考えるとき, NLS の初期値問題は連続な解写像をもたず，従って非適切であることがわかっている (Christ et al.[7], Iwabuchi-Ogawa[13])．つまり,「初期値空間として Sobolev 空間 H^s を考えた場合，どれだけ小さい s に対して

適切性が成り立つか」というLow regularity problemの観点からは，L^2（$s=0$）における結果が最良となる．

次に，NLSの初期値問題をトーラスのようなコンパクトな空間上で考えてみる．このとき，L^2保存則は同様に成立するものの，定数関数は常に線形方程式のL^1に属する解となるから，$\mathbb{R}^d$の場合のような分散評価式は成り立たないことがわかる．従ってStrichartz評価式を全空間の場合と同じように証明することはできず，実際2次元トーラス上の線形解に対するL^4-Strichartz評価式には反例が知られている(Takaoka-Tzvetkov[19])．

そこで，以下のような**微分の損失**がある2次元L^4-Strichartz評価式を考える：

$$\|v\|_{L_t^4([0,1];L_x^4(M))} \leq C\|v(0)\|_{H^\sigma(M)} \tag{†}$$

ここではMは一般に，境界をもたないコンパクトな2次元Riemann多様体としておく．vはM上の線形Schrödinger方程式の解で，一般に$\sigma>0$である．微分の損失がない（右辺がL^2の）場合と区別してこれを「Strichartz型評価式」と呼ぶことにする．

Mが$\mathbb{T}^2$の場合に$\sigma\leq 0$では(†)が成立しないことを述べたが，実は$\sigma>0$では成立する(Bourgain[1])．(証明の概略を次節で述べる.）一般のMについても$\sigma>\frac{1}{4}$で成立することがわかっており，また$\sigma<0$では反例があるが，与えられた多様体Mに対して(†)が成り立つσの範囲を完全に決定することは非常に難しい．例えば球面S^2の場合でも，(†)は$\sigma>\frac{1}{8}$で成立，$\sigma<\frac{1}{8}$で反例が知られているが，$\sigma=\frac{1}{8}$ではよくわかっていない．S^2や一般のMの場合についてはBurq-Gérard-Tzvetkov[3, 4]等を参照.

一方，一般論により(†)（$+\alpha$）から$H^{2\sigma}(M)$におけるNLSの初期値問題の適切性が示せる([4])．例えば$\mathbb{T}^2$の場合には任意の$s>0$に対して初期値問題は$H^s(\mathbb{T}^2)$で適切となる．$s<0$では全空間と同じく非適切性を示せる([8])．しかし$L^2(\mathbb{T}^2)$における適切性は，L^4-Strichartz評価式の破綻だけでは否定することもできず，肯定的な解決もまた非常に難しいように思える．この問題について，次の部分的結果を得た：

$\boxed{\text{定理1}}$ (K.[15]) NLS on $\mathbb{T}^2$に対して，十分滑らかな初期値u_0から（一意な）解uへの写像は，$L^2(\mathbb{T}^2)$から$C([0,T];L^2(\mathbb{T}^2))$への，原点近傍で$C^3$級であるような写像に連続に拡張することができない.

定理1の系として,「逐次近似法では$L^2(\mathbb{T}^2)$における適切性を示せない」ことがわかる.（全空間$\mathbb{R}^2$の場合には逐次近似で解けて，解写像$L^2\ni u_0\mapsto u\in C(L^2)$は原点近傍で$C^\infty$級であった.）しかしながら，実際$L^2(\mathbb{T}^2)$で適切かどうかは全く未解決である.

3. $\mathbb{T}^2$上のStrichartz型評価式と格子点の数え上げ

$\mathbb{T}^2$上のL^4-Strichartz型評価式： $\partial_t v=i\Delta v,\ \sigma>0\ \Rightarrow\ \|v\|_{L^4_{t,x}(\mathbb{T}\times\mathbb{T}^2)}\leq C\|v(0)\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^2)}$
の証明を概観する（詳細は[15]参照）．実際には，ある$\tau\in(0,\sigma)$があって，$N=1,2,4,8,\dots$に対し波数を$\mathbb{Z}_N^2:=\mathbb{Z}^2\cap[-N,N]^2$に制限した初期値$v(0)$をもつ線形解$v(t)$が$\|v\|_{L^4_{t,x}(\mathbb{T}\times\mathbb{T}^2)}\leq CN^\tau\|v(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}$をみたすことを示せば十分である．一方，初期値$v(0)=\sum_{n\in\mathbb{Z}_N^2}a_ne^{in\cdot x}$に対する線形解の具体的な表示$v(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}_N^2}a_ne^{in\cdot x-i|n|^2t}$に注意すれば，Parsevalの等式とCauchy-Schwarzの不等式より

$$\|v\|^2_{L^4(\mathbb{T}\times\mathbb{T}^2)}\leq C\|v(0)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\sup_{(m,n)\in\mathbb{Z}_{4N^2}\times\mathbb{Z}^2_{2N}}\#A(m,n)^{1/2},$$
$$A(m,n):=\left\{\,(n',n'')\in(\mathbb{Z}_N^2)^2\,\middle|\,n'+n''=n,\ -|n'|^2-|n''|^2=m\,\right\}$$

と評価でき，Strichartz型評価式は$\#A(m,n)$の評価に帰着される．さらに簡単な考察で

$$\sup_{(m,n)\in\mathbb{Z}_{4N^2}\times\mathbb{Z}^2_{2N}}\#A(m,n)\leq\sup_{(m,n)\in\mathbb{Z}_{4N^2}\times\mathbb{Z}^2_{2N}}\#\left\{\,l\in\mathbb{Z}^2_{2N}\,\middle|\,|l-n|^2=-2m-|n|^2\,\right\}$$
$$\leq\sup_{0\leq R\leq 16N^2}\#\left\{\,l\in\mathbb{Z}^2\,\middle|\,|l|^2=R\,\right\}$$

がわかり，この右辺を$CN^{4\tau}$で評価できればよい.

このように，トーラス上の評価式の証明は，いくつかの（不）等式をみたす波数（格子点）の組がどのくらいあるかを評価するという組合せ論の問題にしばしば帰着される．今の場合，Strichartz 型評価式の証明は次の初等整数論の結果を適用して完結する：

$$\#\big\{\, l\in\mathbb{Z}^2 \,\big|\, |l|^2=R \,\big\} = O(R^{1/\log\log R}) = O(R^{\varepsilon}) \text{ as } R\to\infty,\ \forall\varepsilon>0.$$

4. Irrational torus の場合

$\mathbb{T}^2$ のかわりに $\mathbb{T}^2_\gamma := \mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z}\times 2\pi\gamma\mathbb{Z}),\ 0<\gamma\notin\mathbb{Q}$ を考えると問題は一気に複雑化する．このような **irrational torus** を扱った研究は Bourgain[2] に始まり，最近になっていろいろな方程式を題材に増えつつある．前節とほぼ同様にして，この場合の L^4-Strichartz 型評価式 (†) は次の不等式に帰着される：

$$\sup_{0\le R\le cN^2} \#\big\{\, l\in\mathbb{Z}^2_\gamma \,\big|\, R\le |l|^2<R+1 \,\big\} \le CN^{4\tau} \quad \text{for some} \quad \tau<\sigma.$$

ここで $\mathbb{Z}^2_\gamma := \mathbb{Z}\times\frac{1}{\gamma}\mathbb{Z}$ は $\mathbb{T}^2_\gamma$ に対応する波数格子である．$\gamma=1$ あるいは $\gamma\in\mathbb{Q}$ ならこの評価は $\tau>0$ で正しいが，一般の無理数 γ では，上式が成り立つ τ の範囲として現在知られている最良のものは $\tau>\frac{131}{832}$ である (Huxley[12])．特に，$\mathbb{T}^2_\gamma$ 上の NLS の初期値問題は $H^s,\ s>\frac{131}{416}$ で成り立つ (Demirbas[9])．

しかし，$s>\frac{131}{416}$ という下限が最良のものとはとても思えない．実際，これらの結果はすべての γ について等しく成り立つものであるが，γ に応じて下限が変わる，特に無理数 γ がある意味で「有理数に近ければ」，下限も有理数の場合の $s>0$ に近づくと考えるのは自然であろう．無理数の有理数からの「近さ」を測る尺度の一つとして **Diophantus 条件**があり，KdV 方程式のシステムに対する Oh[17] の結果のように実際にこの条件によって指数 s の下限が規定される例もあるので，Schrödinger 方程式の L^4-Strichartz 型評価式についても関係しているのではないかと予想される．

今度は逆に，L^4-Strichartz 型評価式 (†) に反例があるかどうかを考えてみる．$\sigma<0$ の場合の反例は簡単であるが，γ が無理数の場合には $\sigma\in[0,\frac{131}{832}]$ で成り立つかどうかが未解決であった．これに対し，γ がある程度「有理数に近ければ」有理数の場合と同様に $\sigma=0$ で反例が存在することを示すことができた：

$\boxed{\text{定理 2}}$ (K.[15])　γ が次の条件 $(*)$ をみたすとき，(†) は $\sigma=0$ で成り立たない．また，定理 1 と同様の主張が成り立つ．

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\, p,\, q\in\mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad |p^2-\gamma^2q^2|<\varepsilon. \tag{$*$}$$

定理に現れる条件 $(*)$ は無理数 γ の**連分数展開**と関係している．実際，無理数 γ の（分子が 1 の）連分数展開の分母に現れる自然数列を $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ とすると，$(*)$ が成り立つことと $\{a_j\}$ が非有界であることは同値である．この特徴づけを用いると次が言える：(i) Lebesgue 測度に関してほとんどすべての $\gamma>0$ は $(*)$ をみたす．(ii) $\sqrt{2}$ や $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 等の 2 次の代数的無理数は $\{a_j\}$ のある部分より先が周期的になることが知られており，従って $(*)$ をみたさない．(iii) 与えられた無理数 γ が $(*)$ をみたすかどうか判定するのは一般には困難．例えば π の連分数展開では分母に $7,15,1,292,1,1,1,2,\cdots$ が現れ，この数列が有界かどうかはわかっていない．

5. 回転流体の方程式における非線形共鳴

最後に流体の運動の方程式で現れる問題を紹介する．本節の内容は T. Yoneda 氏との共同研究 [16] に基づいており，詳細は Yamada-Yoneda[22] および [16] を参照．

惑星の大気など，回転する 3 次元球体にはりついた非圧縮性流体（簡単のため非粘性とする）を考え，Coriolis 力を緯度の 1 次関数と仮定して接平面上の 2 次元流で近似（**β-平面近似**）し，さらに流れ関数を導入して渦度 $\omega(t)$ の時間発展を考えると，その Fourier 係数 $\widehat{\omega}_n(t)$ のみたす方程式は

$$\partial_t\widehat{\omega}_n(t) = i\beta\frac{n_1}{|n|^2}\widehat{\omega}_n(t) + c\sum_{n=k+l}\frac{k_1l_2-k_2l_1}{|l|^2}\widehat{\omega}_k(t)\widehat{\omega}_l(t)$$

となり，Coriolis 力に起因する右辺第 1 項により分散性が生じる．一般に分散型方程式の非線形相互作用においては，非線形部分の振動の波数が線形解の波数と一致する**共鳴状態**にある波数間の相互作用の寄与が大きいと考えられている．そこで，対応する線形方程式の平面波解 $\omega(t,x,y) = c\exp\left(i\beta\frac{n_1}{|n|^2}t\right)e^{i(n_1x+n_2y)}$（**Rossby 波**）を考えると，波数 $k, l \in \mathbb{Z}^2$ に対する Rossby 波が共鳴状態となるための条件は以下で与えられる：

$$n = k + l, \qquad \frac{n_1}{|n|^2} = \frac{k_1}{|k|^2} + \frac{l_1}{|l|^2}. \tag{$\flat$}$$

ところで，この方程式を数値的に解くと木星の表面の縞のような **Zonal flow** に似たパターンが現れることが知られている．このような解は東西方向には定数に近いことから，そのエネルギーの大部分が波数空間で縦軸の近く $n \sim (0, n_2)$ に集中していると考えられる．一方，共鳴状態 ($\flat$) となる波数 k, l が存在するような波数 n を再び数値計算によりプロットすると確かに横軸より縦軸の近くに多く分布しており，Rossby 波の非線形相互作用が Zonal flow を引き起こす要因の一つであることが示唆される．

そこで，このような「共鳴波数分布の非等方性」を理論的に証明することが意味を持つ．これは条件式 ($\flat$) が定める代数曲面上の格子点の分布を調べる問題であり，一般には非常に困難であろう．[16] では関係式が退化した特別な場合を考え，次を示した：

$\boxed{\text{定理 3}}$ $n_2 = 0$ となる（「非自明」な）共鳴波数 $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ は存在しない．

References

[1] J. Bourgain; Geom. Funct. Anal. **3** (1993), no. 2, 107–156.

[2] J. Bourgain; Ann. of Math. Stud. **163** “Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations” (2007), 1–20.

[3] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov; Amer. J. Math. **126** (2004), no. 3, 569–605.

[4] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov; Invent. Math. **159** (2005), no. 1, 187–223.

[5] T. Cazenave, F.B. Weissler; Manuscripta Math. **61** (1988), no. 4, 477–494.

[6] T. Cazenave, F.B. Weissler; Nonlinear Anal. **14** (1990), no. 10, 807–836.

[7] M. Christ, J. Colliander, T. Tao; preprint (2003). (arXiv:math/0311048)

[8] M. Christ, J. Colliander, T. Tao; preprint (2003). (arXiv:math/0311227)

[9] S. Demirbas; preprint (2013). (arXiv:1307.0051)

[10] J. Ginibre, G. Velo; Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **2** (1985), no. 4, 309–327.

[11] G.H. Hardy, E.M. Wright; *An introduction to the theory of numbers. Sixth edition*, Oxford University Press, Oxford, 2008.

[12] M.N. Huxley; Proc. London Math. Soc. (3) **87** (2003), no. 3, 591–609.

[13] T. Iwabuchi, T. Ogawa; Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), no. 4, 2613–2630.

[14] M. Keel, T. Tao; Amer. J. Math. **120** (1998), no. 5, 955–980.

[15] N. Kishimoto; Proc. Amer. Math. Soc. **142** (2014), no. 8, 2649–2660.

[16] N. Kishimoto, T. Yoneda; preprint (2014). (arXiv:1409.1031)

[17] T. Oh; Int. Math. Res. Not. IMRN **2009**, no. 18, 3516–3556.

[18] M. Strichartz; Duke Math. J. **44** (1977), no. 3, 705–714.

[19] H. Takaoka, N. Tzvetkov; J. Funct. Anal. **182** (2001), no. 2, 427–442.

[20] Y. Tsutsumi; Funkcial. Ekvac. **30** (1987), no. 1, 115–125.

[21] K. Yajima; Comm. Math. Phys. **110** (1987), no. 3, 415–426.

[22] M. Yamada, T. Yoneda; Phys. D **245** (2013), 1–7.