無限ブレイド群の交換子部分群上の共役不変ノルム

木村 満晃 *

東京大学数理科学研究科修士 2 年，2015 年 2 月

以下 G を群とする. また, x^y で x の y による共役 yxy^{-1} を表すものとする.

1 共役不変ノルムと Burago-Ivanov-Polterovich の問題

Burago-Ivanov-Polterovich は [3] において共役不変ノルムの概念を導入した.

定義 1.1 ([3]) 群 G 上の函数 $\nu : G \to \mathbb{R}$ が**共役不変ノルム** (conjugation-invariant norm) であるとは, 次の (i)〜(v) を充たすことである.

(i) $\nu(1) = 0$ (1 は G の単位元)

(ii) $\nu(f) = \nu(f^{-1})$ ($^\forall f \in G$)

(iii) $\nu(fg) \leq \nu(f) + \nu(g)$ ($^\forall f, {}^\forall g \in G$)

(iv) $\nu(f) = \nu(gfg^{-1})$ ($^\forall f, {}^\forall g \in G$)

(v) $\nu(f) > 0$ ($^\forall f \neq 1 \in G$)

例 1.2 交換子長 $\mathrm{cl}(g) = \min \left\{ l \;\middle|\; g = [a_1, b_1] \cdots [a_l, b_l],\ {}^\exists a_i, {}^\exists b_i \in G \right\}$ は $[G, G]$ 上の共役不変ノルムである.

上の例のような共役不変ノルムを一般的な形で定義する.

定義 1.3 ([3]) 群 G が部分集合 $K \subset G$ が G を正規生成しているとする. このとき G 上の函数 $q_K : G \to \mathbb{R}$ を

$$q_K(f) = \min\{l \mid f = k_1^{g_1} \cdots k_l^{g_l}, {}^\exists k_i \in K, {}^\exists g_i \in G\}$$

により定める. q_K を**共役生成ノルム** (conjugation-generated norm, c-generated norm) という. q_K は G 上の共役不変ノルムである.

共役不変ノルムは双不変距離 (biinvariant metric) とよばれる群の上の「良い」距離と 1 対 1 対応する. 群がどのような双不変距離を許容するか, すなわちどのような共役不変ノルムを許容するかは, 群の幾何学的性質を反映していると考えられる.

ここで共役不変ノルムの安定 (非) 有界性の概念を導入する.

*mkimura@ms.u-tokyo.ac.jp

定義 1.4 共役不変ノルム $\nu : G \to \mathbb{R}$ が**安定有界** (stably bounded) であるとは, $\bar{\nu}(g) := \lim_{n\to\infty} \frac{\nu(g^n)}{n}$ で定まる ν の安定化 $\bar{\nu}$ が恒等的に 0 となることである. そうでないとき (すなわち, $\bar{\nu}(f) > 0$ なる $f \in G$ が存在するとき) **安定非有界** (stably unbounded) という.

任意の群に対し安定有界なノルムは常に存在するので, 安定非有界なノルムを許容するか否かを群の性質と思うことにする. 安定非有界なノルムを許容する典型的な状況は, 交換子長が安定非有界 (安定交換子長が正) である場合である. そこで次の問いがなされた.

問題 1.5 ([3]) $H_1(G) = G/[G,G]$ が有限である群 G であって, $[G,G]$ 上で交換子長は安定有界であるが, 安定非有界な G 上の共役不変ノルムを許容するものが存在するか?

この問題は, 川崎 [5] および Brandenbursky-Kędra [2] により独立に解決された. 川崎は Euclid 空間のシンプレクティック微分同相群の Calabi 準同型の核において, Brandenbursky-Kędra は無限ブレイド群の交換子部分群において, 安定非有界なノルムの存在を示している.

今回, 川崎の方法を応用することにより, 無限ブレイド群の交換子部分群上に安定非有界なノルムを構成し, 特に問題 1.5 の別解を与えたので, 以下その構成について述べる.

2 Bavard の双対と川崎の方法

まず Bavard の双対について説明する. Bavard の双対は, 交換子長と擬準同型の間の関係を記述するものである. 擬準同型の定義を述べる.

定義 2.1 群 G 上の実函数 $\phi : G \to \mathbb{R}$ が**擬準同型** (quasi-morphism) であるとは, ある定数 C が存在して, 任意の $g, h \in G$ に対し

$$|\phi(gh) - \phi(g) - \phi(h)| \leq C$$

が成り立つことである. この不等式を充たす最小の C を ϕ の **defect** とよび, $D(\phi)$ で表す.

また, 擬準同型 ϕ が**斉次** (homogeneous) とは, 任意の $g \in G$ および $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\phi(g^n) = n\phi(g)$ が成り立つことをいう.

Bavard の双対定理の主張は以下の通りである.

定理 2.2 (Bavard の双対定理 [1])
G を群とし, $g \in [G,G]$ とする. このとき,

$$\mathrm{scl}(g) = \sup_{\phi} \frac{|\phi(g)|}{2D(\phi)}$$

が成り立つ. ここで ϕ は (準同型でない) 斉次擬準同型全体を動く.

ただし scl は交換子長 cl の安定化で, 安定交換子長 (stable commutator length) とよばれる. これから得られる系として, 群が非自明な擬準同型を許容することと, 交換子長が安定非有界であることが同値であることが分かる.

川崎は, この関係の “norm controlled version” を観察した. 交換子長および擬準同型の類似にあたる概念をそれぞれ定義する.

定義 2.3 ν を G 上の共役不変ノルムとし, $p, q > 0$ とする. G の部分群 $[G,G]_{\nu,p,q}$ を, 交換子 $[f,g] \in G$ であって, $\nu(f) \leq p$, $\nu(g) \leq q$ をみたす元たちで生成される群と定め, (ν,p,q)**-交換子部分群**とよぶ. このとき, $\mathrm{cl}_{\nu,p,q} : [G,G]_{\nu,p,q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$\mathrm{cl}_{\nu,p,q}(h) = \min\left\{ k \;\middle|\; h = [f_1,g_1]\cdots[f_k,g_k], \quad \begin{array}{l} ^\exists f_i, {}^\exists g_i \in G,\ (i = 1,\ldots,k) \\ \nu(f_i) \leq p, \nu(g_i) \leq q \end{array} \right\}$$

で定め, $\mathrm{cl}_{\nu,p,q}(h)$ を h の (ν,p,q)**-交換子長**とよぶ.

定義 2.4 ν を G 上の共役不変ノルムとする. 群 G 上の函数 $\phi : G \to \mathbb{R}$ が ν に関する**相対的擬準同型** (quasi-morphism relative to ν) であるとは, ある定数 $C > 0$ が存在して,

$$|\phi(fg) - \phi(f) - \phi(g)| \leq C \cdot \min\{\nu(f), \nu(g)\}$$

が任意の $f, g \in G$ に対し成り立つことをいう.

これらの間の関係について以下のことが成り立つ.

命題 2.5 ([5], Proposition 2.4.)

ϕ を共役不変ノルム ν に関する相対的擬準同型, $p, q > 0$ とする. このとき, $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(h_0^n)}{n} > 0$ となるような $h_0 \in [G,G]_{\nu,p,q}$ が存在するならば, $\mathrm{cl}_{\nu,p,q}$ は $[G,G]_{\nu,p,q}$ 上の安定非有界な共役不変ノルムである.

つまり, 群が非自明な相対的擬準同型を許容すれば, (ν,p,q)-交換子長は安定非有界となる. 従って, 群が安定非有界なノルムを許容することを示す方法として, 相対的擬準同型をみつければよいことが分かる.

3 ブレイドの符号数 (signature of braids)

n **ブレイド** (n-braid) とは, 上から下にはしる n 本の紐の組のアイソトピー類である (図 1). n ブレイド全体のなす集合を B_n とかく. n ブレイドを上下に繋ぐ操作により B_n は群をなす. これを**ブレイド群** (braid group) とよぶ. ブレイド α の紐の上下を繋ぐことにより得られる絡み目を α の**閉包** (closure) とよび, $\widehat{\alpha}$ で表す (図 1).

"自明な紐" を 1 本加える操作に対応する標準的な単射 $\iota_n : B_n \to B_{n+1}$ により, 包含関係の列 $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n \subset \cdots$ が得られる. この列の和集合 $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_n$ を**無限ブレイド群** (infinite braid group) とよび, B_∞ で表す.

まず, 有限ブレイド群には非自明な擬準同型が存在することをみる. ブレイド $\alpha \in B_n$ に対し, その閉包 $\widehat{\alpha}$ に絡み目の不変量の一つである符号数 (signature) $\sigma(\widehat{\alpha})$ を対応させる函数をブレイドの符号数 (signature of braids) とよび, これも $\sigma(\alpha)$ で表すことにする.

命題 3.1 有限ブレイドの符号数 $\sigma : B_\infty \to \mathbb{R}$ は擬準同型である.

証明. $\alpha, \beta \in B_n$ とする. 符号数の性質より $\sigma(\widehat{\alpha} \sqcup \widehat{\beta}) = \sigma(\widehat{\alpha}) + \sigma(\widehat{\beta})$ が成り立つ. また, 絡み目に対し saddle move とよばれる操作 (図 2) を施すことによって, 符号数は高々1 しか変化しないことが知られている [7]. いま, $\widehat{\alpha} \sqcup \widehat{\beta}$ に n 回 saddle move を施すことで $\widehat{\alpha\beta}$ が得られることから (図 3), $|\sigma(\alpha\beta) - \sigma(\alpha) - \sigma(\beta)| = |\sigma(\alpha\beta) - \sigma(\widehat{\alpha} \sqcup \widehat{\beta})| \leq n$ が成り立つ. □

符号数 σ は標準的な単射 ι_n と compatible であるので, 無限ブレイド上でも well-defined である. しかし, defect が紐の本数に依存するので, 無限ブレイドにおいては符号数が擬準同型であることは従わない. 実際, B_∞ 上の非自明な擬準同型は存在しないことが Kotschick によって示されており, 交換子長は安定有界である [6].

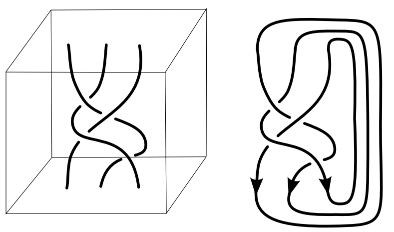

図 1: a braid and its closure

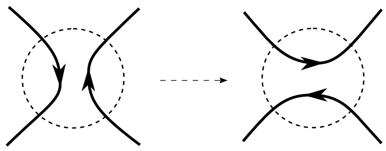

図 2: saddle move

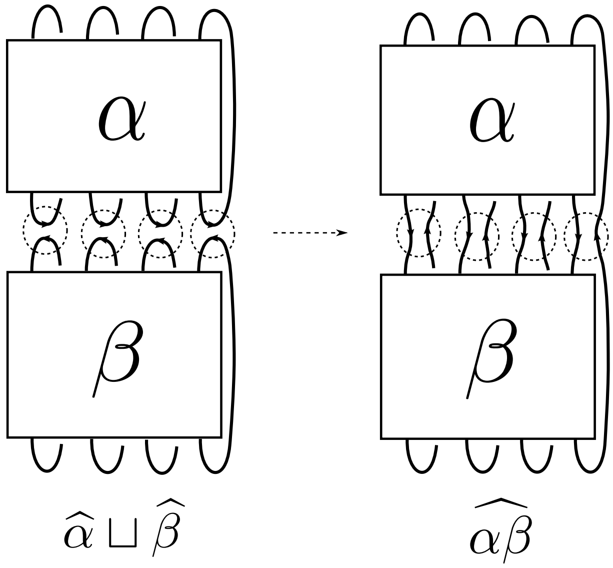

図 3

安定非有界なノルムの構成の為に, 相対的擬準同型の存在をみればよいのであった. 我々の戦略は, 有限ブレイドにおいて擬準同型であった符号数を無限ブレイドにおいて考え, それが (擬準同型ではないが) 相対的擬準同型とならないかを考えるというものである.

4 主結果

まず相対的擬準同型であることを示す際に有用な (必要) 充分条件を与える. これは [4] に表れる議論を一般化したものである.

補題 4.1 ([4], Lemma 7.3.) 群 G が $K \subset G$ で正規生成されているとする. $\phi : G \to \mathbb{R}$ を G 上の函数とする. このとき, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $g \in G$, および $q_K(h) = 1$ なる任意の $h \in G$ に対し, $|\phi(gh) - \phi(g) - \phi(h)| \leq C$ をみたすならば, ϕ は共役生成ノルム q_K に関する相対的擬準同型である.

定理 4.2 符号数 $\sigma : B_\infty \to \mathbb{R}$ は共役生成ノルム q_{B_n} に関して相対的擬準同型である.

証明. $\alpha, \beta \in B_\infty$ とし, $q_{B_n}(\beta) = 1$ を仮定する. この仮定の下で $|\sigma(\alpha\beta) - \sigma(\alpha) - \sigma(\beta)| \leq n$ が成り立つことを示す. これが示されれば補題 4.1 より主張が従う.

仮定より, $\beta^\gamma \in B_n \subset B_\infty$ を充たす $\gamma \in B_\infty$ が存在する. このとき $\alpha^\gamma \in B_m$ $(m > n)$ であるとする. 符号数の共役不変性より,

$$|\sigma(\alpha\beta) - \sigma(\alpha) - \sigma(\beta)| = |\sigma(\alpha^\gamma\beta^\gamma) - \sigma(\alpha^\gamma) - \sigma(\beta^\gamma)|.$$

$\widehat{\alpha^\gamma} \sqcup \widehat{\beta^\gamma}$ に m 回 saddle move を施すことで $\widehat{\alpha^\gamma\beta^\gamma}$ を得るが, β^γ の $n+1$ 番目以降の紐は自明であるので, $\widehat{\beta^\gamma}$ は $m-n$ 個の自明な結び目成分をもち, これらに連結和を施しても符号数は変わらない (図 4). 従って, m 回の saddle move で符号数は高々n しか変化しないので,

$$|\sigma(\alpha^\gamma\beta^\gamma) - \sigma(\alpha^\gamma) - \sigma(\beta^\gamma)| \leq n. \square$$

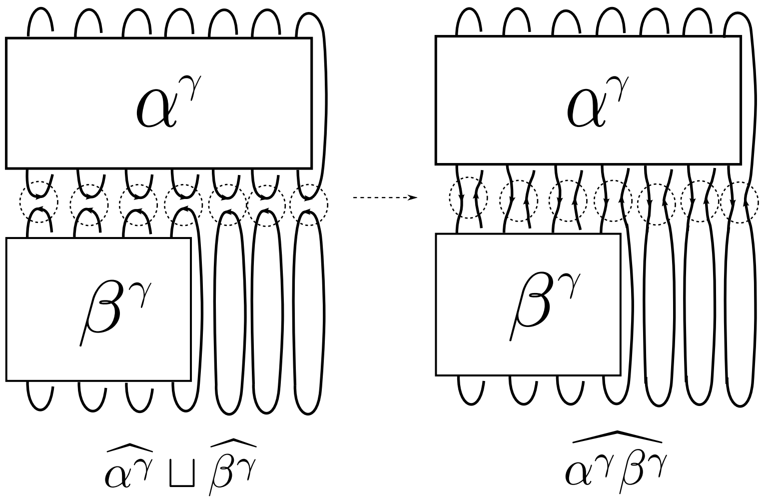

図 4

符号数 $\sigma : B_\infty \to \mathbb{R}$ について命題 2.5 の条件をチェックすることにより, 以下の系を得る.

系 4.3 $\mathrm{cl}_{q_{B_n},p,q}$ は無限ブレイド群の交換子部分群 $[B_\infty, B_\infty]$ 上の安定非有界なノルムである. 特に $[B_\infty, B_\infty]$ は安定非有界な共役不変ノルムを許容する.

参考文献

[1] C. Bavard, *Longueur stable des commutateurs*, Enseign. Math. 37 (1991), 109-150.

[2] M. Brandenbursky and J. Kędra, *Concordance group and stable commutator length in braid groups*, arXiv:1402.3191

[3] D. Burago, S. Ivanov, and L. Polterovich, *Conjugation-invariant norms on groups of geometric origin*, Adv. Stud. Pure Math. 52 (2008), 221-250.

[4] M. Entov and L. Polterovich, *Quasi-states and symplectic intersections*, Comment. Math. Helv., 81 (1) (2006), 75-99.

[5] M. Kawasaki, *Relative quasimorphisms and stably umbounded norms on the group of symplectomorphisms of the Euclidean spaces*, J. Symplectic Geom. (to appear)

[6] D. Kotschick, *Stable length in stable groups*, Adv. Stud. Pure Math. 52 (2008), 401-413.

[7] K. Murasugi, *On a certain numerical invariant of link types*, Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965), 387-422.