Heavy subsets and non-contractible trajectories

川崎　盛通 *

東京大学，2015 年 2 月

慈悲ふかく慈悲あまねきハミルトン力学系の御名において……

0　導入

ハミルトン・イソトピーの周期軌道の存在問題, ｎ on-displaceability, 非圧縮性などハミルトン力学系に特有の" 制約" はしばしば" シンプレティック剛性" と呼ばれる. 概正則曲線やフレアー理論を用いて個別の" シンプレクティック剛性" を研究することはグロモフの著名な業績以来継続的に行われ 数々の豊穣な理論を提供してきたのであるが, 筆者の関心はそこから関心を少しずらして別個の" シンプレクティック剛性" の間を" 関連付ける" ことにある. 本稿においては non-displaceability(displaceability) と周期軌道の存在問題を関連付ける.

1　基本的な記法と定義

本章においては本稿で用いる基本的記法・定義を整理する.

本稿においてはシンプレクティック多様体 (M_1, ω_1) と (M_2, ω_2) があった場合には多様体 $M_1 \times M_2$ にはシンプレクティック形式 $\omega_1 + \omega_2$ が入ると考えて話を進めるとする.

(M, ω) をシンプレクティック多様体とする. このとき、ハミルトン函数 $H \colon M \to \mathbb{R}$ に対して、そのハミルトン・ベクトル場 X_H を

$$\text{任意 } V \in \mathcal{X}(M) \text{ に対して } \omega(X_H, V) = -dH(V),$$

によって定義する.

本稿で S^1 と書いた場合には $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を指すとする. このとき, 時間依存するハミルトン函数 $H \colon S^1 \times M \to \mathbb{R}$(本稿においてはハミルトン函数は常にコンパクト台を持つとする) に対して、そのハミルトン・イソトピー $\{\phi_H^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を $\phi_H^0 = \mathrm{id}$, $\frac{d}{dt}\phi_H^t(x) = (X_{H_t})_{\phi_H^t(x)}$ という常微分方程式により定義する. また,　時刻 1 での微分同相写像 ϕ_H^1 を ϕ_H と書く.

シンプレクティック多様体 (M, ω) の閉部分集合 X が *displaceable* というのは, あるハミルトン函数 $H \colon S^1 \times M \to \mathbb{R}$ が存在して, $X \cap \phi(X) = \emptyset$ となることである. そうでない場合 *non-displaceable* という.

M の部分集合 X について, その displacement energy を

$$E(X) = \inf\{\int_0^1 \|H_t\|_{C^0} dt; H \in C_c^\infty(S^1 \times M), \bar{X} \cap \phi_H^1(X) = \emptyset\},$$

*cawasaki@ms.u-tokyo.ac.jp

によって定義する (X が non-displaceable の場合は $E(X) = \infty$ とする).

M の自由ループ空間 $C^\infty(S^1, M)$ を $\mathcal{L}M$ と書く. 自由ループ類 α に対し, α を代表する自由ループの集合 $\{z \in \mathcal{L}M; [x] = \alpha\}$ を $\mathcal{L}_\alpha M$ と書く.

2 スペクトル不変量と重い部分集合

本稿の主定理を述べるには" 重い部分集合"(heavy subset)'([**?**, **?**]) を定義する必要がある. その定義にはハミルトン・フレアー理論から来るスペクトル不変量を用いる必要があり, 本章ではこれらの導入を行う.

閉シンプレクティック多様対 (M, ω) に対し, アーベル群 $\Gamma = \pi_2(M)/\operatorname{Ker}(c_1) \cap \operatorname{Ker}([\omega])$ を考え, (M, ω) のノヴィコフ環 Λ を

$$\Lambda = \left\{ \sum_{A \in \Gamma} a_A A; a_A \in \mathbb{Z}_2, \#\text{任意の実数 } R \text{ に対して } \{A; a_A \neq 0, \int_A \omega < R\} < \infty \right\},$$

によって定義する.

このとき, (M, ω) の量子ホモロジー $QH_*(M, \omega)$ は Λ-加群 $H_*(M; \mathbb{Z}_2) \otimes_{\mathbb{Z}_2} \Lambda$ として定義されるが, 量子積 $*$ という自然な積構造を持つ ([**?**]). 量子積はグロモフ・ウィッテン不変量を用いて定義されるが, 本稿では詳説しない.

このとき, **スペクトル不変量** $c(a, F)$ は量子ホモロジーの 0 でない元 a, ハミルトン函数 $F\colon S^1 \times M \to \mathbb{R}$ に対して定義される実数である. 上述の量子ホモロジーはハミルトン・フレアーホモロジーとの間に PSS 同型と呼ばれる標準的な同型写像を持ち, これを用いてスペクトル不変量は定義される.

量子ホモロジーの冪等元 $a(a * a = a)$ に対し, 汎函数 $\zeta_a\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ をスペクトル不変量 $c(a, \cdot)$ の安定化

$$\zeta_a(H) = \lim_{l \to \infty} \frac{c(a, lH)}{l},$$

として定義する.

定義 2.1 ([?]) (M, ω) を閉シンプレクティック多様体, a を量子ホモロジーの冪等元とする. M の閉集合 X が *a-**heavy*** というのは

$$\text{任意の } H \in C^\infty(M) \text{ に対して} \zeta_a(H) \geq \inf_X H,$$

となることである. X が ***heavy*(重い)** というのは X がある冪等元 a について *a-heavy* であることである.

エントフとポルテロヴィッチは重い部分集合が non-displaceable であることを示している ([**?**] Theorem 1.4).

例 2.2 $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ をフビニ・スタディ形式を持った複素射影空間とする. そのクリフォード・トーラス $C = \{[z_0 : \ldots : z_n] \in \mathbb{C}P^n; |z_0| = \cdots = |z_n|\} \subset \mathbb{C}P^n$ は重い *([**?**] Lemma 5.1, [**?**] Theorem 1.8)*. 特に二次元球面の赤道は重い.

また, 標準的なシンプレクティック形式の入った二次元トーラスの罫線と緯線も重い *([**?**] Example 1.18, Corollary 6.4)*.

3　相対的シンプレクティック容量と主定理

ハミルトン流の非可縮軌道の存在問題がハミルトン函数の C^0 ノルムに制御される現象が多く知られている ([**?**],[**?**],[**?**], [**?**]) が, その主張はしばしば相対的シンプレクティック容量の言葉で書かれる. 本稿においても主定理を新たに導入する相対的シンプレクティック容量の言葉で書く.

最初にビラン・ポルテロヴィッチ・サラモン [**?**] による相対的シンプレクティック容量を導入する. (N,ω) を開シンプレクティック多様体とし, Y を N のコンパクト部分集合とする. このとき, 相対的なシンプレクティック容量 $C(N,Y;\alpha)$ を

$$C(N,Y;\alpha)=\inf\{K>0;\forall H\in\mathcal{H}_K(N,Y),\mathcal{P}(H;\alpha)\neq\emptyset\},$$

によって定義する. ただし, $\mathcal{H}_K(N,Y)=\{H\in C_c^\infty(S^1\times N);\inf_{S^1\times Y}H\geq K\}$ である.

次に $C(N,Y;\alpha)$ を用いて本稿で用いる相対的シンプレクティック容量を導入する. (M,ω) を連結なシンプレクティック多様体, X を M のコンパクト部分集合とする. $e=(e_1,\dots,e_n)\in\mathbb{Z}^n$ と $R=(R_1,\dots,R_n)\in(\mathbb{R}_{>0})^n$ に対し, 相対的シンプレクティック容量 $\hat{C}(M,X,R;e)$ を以下のように定義する.

$$\hat{C}(M,X,R;e)=C(M\times B^*T^n(R),X\times T^n;(c_M,e)).$$

ここで, 余接束内の開集合 $B^*T^n(R)=\{(p,q)\in T^*(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n;|p_i|<R_i\}$ には標準的なシンプレクティック形式 $\omega_0=dp_1\wedge dq_1+\cdots+dp_n\wedge dq_n$ が入るものとする. また, $T^n=\{(p,q)\in B^*T^n(R);p=0\}$ は 0 切断とし, c_M は M 内の可縮なループの代表する自由ループ類とする.

シンプレクティック多様体 (M,ω) が λ-単純であるとは, 実数 λ について $\omega=\lambda c_1$ となることである. ここで c_1 は ω(に適合する概複素構造) に対する第一チャーン類である.

このとき, 本稿における主定理は以下である.

定理 3.1 (M,ω) を m 次元連結閉 λ-単純シンプレクティック多様体, X を M の重い部分集合とする. このとき, 任意の $e=(e_1,\dots,e_n)\in\mathbb{Z}^n$ と $R=(R_1,\dots,R_n)\in(\mathbb{R}_{>0})^n$. に対して,

$$\hat{C}(M,X,R;e)\leq 2\sum_{i=1}^n R_i\cdot|e_i|+\max\{0,-\lambda(m+n)\}.$$

注意 3.2 講演時に書いた主張には単純性の仮定と補正項 $\max\{0,-\lambda(m+n)\}$ がなかった. 講演ののちに証明にミスが判明し訂正されたのが上の主張である. この場を借りて訂正申し上げる.

定理 **??**の証明はスペクトル不変量に関するある不等式を示すことによって得られるこの不等式は入江 [**?**] と Seyfaddini[**?**] の手法を組み合わせることにより得られる.

また, 上の X が displaceable のときには以下がいえる.

命題 3.3 (M,ω) を連結シンプレクティック多様体, X を *displaceable* な M のコンパクト部分集合とする. ある k に対して $|e_k|\cdot R_k>E(X)$ となる $e=(e_1,\dots,e_n)\in\mathbb{Z}^n$ と $R=(R_1,\dots,R_n)\in(\mathbb{R}_{>0})^n$ に対して, $\hat{C}(M,X,R;e)=\infty$ となる.

定理 **??**と命題 **??**を比べれば分かるように, X が non-displaceable であるか否かによりハミルトン力学系の周期点の性質が著しく異なるのである. これをより鮮明に見せるために以下の初等的な例を挙げる.

例 3.4 二次元球面 $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R};x^2+y^2+z^2=1\}$ に標準的な面積形式 ω_0 を入れる (二次元なので面積形式はシンプレクティック形式とみなせる). 函数 $h\colon S^2\to\mathbb{R}$ を $h(x,y,z)=z$ により定義し,

$C_z = h^{-1}(z)$ とおく. このとき, $z \neq 0$ に対し $E(C_z) \leq \pi$ となる (回転を生成するハミルトン函数を考えればよい) 一方で C_0 は例 **??**より重い部分集合であり, 特に *non-displaceable* である. したがって定理 **??**と命題 **??**から以下が従う. 任意の $R > \pi$ について

$$\hat{C}(S^2, C_z, R; 1) \begin{cases} \leq 4\pi & (z = 0), \\ = \infty & (z \neq 0). \end{cases} \tag{1}$$

4 "C^0-ノルムが C^1-ノルムを支配する"

??章冒頭において「ハミルトン流の非可縮軌道の存在問題がハミルトン函数の C^0 ノルムに制御される」と書いたが, これは実はかなり意外な現象である. というのも, 定義を見て分かるように, ハミルトン・イソトピーはハミルトン函数の C^1-ノルム的な情報により決定されるものであり, その周期軌道の問題が C^0-ノルムに制御 (支配) されてしまうのは実に奇妙な現象である.

本稿の主結果とは直接関係ないものの, この思想 "C^0-ノルムが C^1-ノルムを支配する" がよく現れている例として, ポアソン積の C^0-剛性なるものが知られている.

ハミルトン函数 $F, G\colon M \to \mathbb{R}$ の**ポアソン積** $\{F, G\}\colon M \to \mathbb{R}$ は $\{F, G\} = \omega(X_G, X_F)$ により定義される. ダルブー座標での表示 $\{F, G\} = \sum_i (\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i})$ からも分かるように, ハミルトン函数の C^1-ノルム的な情報から決まるものである. このとき, 任意のシンプレクティック多様体 (M, ω) 上の任意のハミルトン函数 $F, G\colon M \to \mathbb{R}$ に対し,

定理 4.1 *[?, ?, ?, ?]*

$$\liminf_{\overline{F},\overline{G} \xrightarrow{C^0} F,G} \|\{\overline{F}, \overline{G}\}\|_{C^0} = \|\{F, G\}\|_{C^0}$$

となる. 見て分かるように C^1-ノルムで決定されるはずのポアソン積が C^0-ノルムでの収束について剛性を持っているという主張であり, "C^0-ノルムが C^1-ノルムを支配する" という思想を体現しているのがお分かりいただけるように思う.

5 エネルギー不等式

ハミルトン流の周期軌道の存在問題と displaceability の関係といえば, 古典的なものとしてエネルギー不等式というものが知られている. この古典的なテーマについて概説し, 本稿主定理と比較して筆を置くこととしたい.

ホーファー・ゼンダー容量 C_{HZ} を以下のように定義する.

$$C_{HZ}(M) = \inf\{K > 0; \forall H \in \mathcal{H}_K(M), \phi_H^t \text{は周期 1 以下の非自明な周期軌道を持つ}\}.$$

ただし $\mathcal{H}_K(M) = \{H \in C_c^\infty(M); \exists U, V : \text{open subset of } M \text{ s.t. } H_U = 0 \text{ and } H_V = K.\}$ としている. $\mathcal{H}_K(M)$ の定義において時間変化しないハミルトン函数のみを考えていることに注意してほしい.

このとき, 以下の不等式が成立し, これをエネルギー不等式という.

定理 5.1 (エネルギー不等式) *[?, ?, ?]* (N, ω) を閉シンプレクティック多様体, もしくは凸で $\pi_2(N) = 0$ な開シンプレクティック多様体とする. M は N の開部分集合とする. このとき

$$C_{HZ}(M) \leq E(M).$$

定理 **??**は displaceable な部分集合が周期軌道を生み出すという主張なのに対して, 定理**??**は non-displaceable な部分集合が周期軌道を生み出すという主張であり, 対照的である.

参考文献

[BEP] P. Biran, M. Entov and L. Polterovich, *Calabi quasimorphisms for the symplectic ball*, Commum. Contemp. Math., **6** (2004), 793-802.

[BPS] P. Biran, L. Polterovich and D. Salamon, *Propagation in Hamiltonian dynamics and relative symplectic homology*, Duke Math. J., **1** (2003), 65-118.

[B] L. Buhovsky, *The* $2/3$*-convergence rate for the Poisson bracket*, Geom. Funct. Anal. ., **19**(6) (2010), 1620-1649.

[CV] F. Cardin and C. Viterbo, *Commuting Hamiltonians and Hamilton-Jacobi multi-time equations*, Duke Math. J., **144**(2) (2008), 235-284.

[EP09] M. Entov and L. Polterovich, *Rigid subsets of symplectic manifolds*, Comp. Math., **145** (3) (2009), 773-826.

[EP10] M. Entov and L. Polterovich, C^0*-rigidity of Poisson brackets*, Contemp. Math., **512** (2010), 25–32.

[FGS] U. Frauenfelder, V. Ginzburg and F. Schlenk, *Energy capacity inequalities via an action selector*, Comp. Math., **387** (2005), 129-152.

[GL] D. Gatien and F. Lalonde, *Holomorphic cylinders with Lagrangian boundaries and Hamiltonian dynamics*, Duke Math. J., **102**(3) (2000), 485-511.

[HZ] H. Hofer and E. Zehnder, *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*, Birkhuser Advanced Texts: Basler Lehrbcher, (1994).

[Ir] K. Irie, *Hofer-Zehnder capacity and a Hamiltonian circle action with noncontractible orbits*, arXiv:1112.5247v1.

[N] C. Niche, *Non-contractible periodic orbits of Hamiltonian flows on twisted cotangent bundles*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **14** (4) (2006), 617-630.

[Oh] Y. -G. Oh, *Lectures on Floer theory and spectral invariants of Hamiltonian flows*, Morse Theoretic Methods in Nonlinear Analysis and in Symplectic Topology, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.y, **217** (2006), 321-416.

[P] L. Polterovich, *Symplectic intersections and invariant measures*, Ann. Math. Qué, **38** (2014), 81-93.

[PR] L. Polterovich and D. Rosen, *Function theory on symplectic manifolds*, , ().

[S] S. Seyfaddini, *Descent and* C^0*-rigidity of spectral invariants on monotone symplectic manifolds*, Topol. Anal., **4** (2012), 481-498.

[U] M. Usher, *The sharp energy-capacity inequality*, Commun. Contemp. Math., **12**(3) (2010), 457-473.