1次元定常輸送方程式の正則性解析

川越　大輔[*]

京都大学大学院情報学研究科，2015 年 2 月

1　問題設定

Ω を開区間 $(0,1)$, S^1 を単位円とし, 次の微分積分方程式を考える:

$$-\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}I(x,\xi)-(\mu_a+\mu_s)I(x,\xi)+\mu_s\int_{S^1}p(\xi,\xi')I(x,\xi')\,d\sigma_{\xi'}=0,\quad (x,\xi)\in\Omega\times S^1. \tag{1}$$

ただし, θ は $\xi=(\cos\theta,\sin\theta)$ を満たす $(-\pi,\pi]$ の元であり, 以下この関係により S^1 と $(-\pi,\pi]$ を同一視する. また, $d\sigma$ は S^1 上の線素とする. ここで, μ_a および μ_s は非負の定数, p は $S^1\times S^1$ 上の連続関数であることを仮定する. 本稿では, 方程式 (1) を 1 次元定常輸送方程式と呼ぶ.

定常輸送方程式 (1) には, 通常次の境界条件が課される:

$$I(x,\xi)=I_0(x,\xi),\quad (x,\xi)\in\Gamma_-. \tag{2}$$

ただし,

$$\Gamma_-:=\{(0,\xi)|0<\theta<\pi\}\cup\{(1,\xi)|-\pi<\theta<0\}$$

とする.

最後に, 定常輸送方程式の境界値問題の解を次のように定義する. ただし, $C_b\left((\Omega\times S^1)\cup\Gamma_-\right)$ は $(\Omega\times S^1)\cup\Gamma_-$ 上の有界連続関数全体からなるベクトル空間とし,

$$\|I\|_\infty:=\sup_{(x,\xi)\in(\Omega\times S^1)\cup\Gamma_-}|I(x,\xi)|$$

で定義されるノルム $\|\cdot\|_\infty$ により Banach 空間となる.

定義 1 *$I\in C_b\left((\Omega\times S^1)\cup\Gamma_-\right)$ が次の積分方程式を満たすとき, I は定常輸送方程式の境界値問題 (1)-(2) の解であるという.*
$x\in[0,1),\theta\in(0,\pi)$ のとき,

$$I(x,\xi)=\exp\left(-\frac{\mu_a+\mu_s}{\sin\theta}x\right)I_0(0,\xi)+\frac{\mu_s}{\sin\theta}\int_0^x\exp\left(-\frac{\mu_a+\mu_s}{\sin\theta}(x-t)\right)\int_{S^1}p(\xi,\xi')I(t,\xi')\,d\sigma_{\xi'}dt. \tag{3}$$

$x\in(0,1],\theta\in(-\pi,0)$ のとき,

$$I(x,\xi)=\exp\left(\frac{\mu_a+\mu_s}{\sin\theta}(1-x)\right)I_0(1,\xi)-\frac{\mu_s}{\sin\theta}\int_x^1\exp\left(\frac{\mu_a+\mu_s}{\sin\theta}(t-x)\right)\int_{S^1}p(\xi,\xi')I(t,\xi')\,d\sigma_{\xi'}dt. \tag{4}$$

本稿では, この境界値問題の存在と一意性, さらに境界値の滑らかさと解の滑らかさとの関係について述べる.

[*]d.kawagoe@acs.i.kyoto-u.ac.jp

2 主結果

定理 1 $I_0 \in C_b(\Gamma_-)$ かつ $\mu_a > 0$ と仮定する．このとき，境界値問題 (1) - (2) はただ１つの解 I をもつ．

定理 2 定理 1 と同じ仮定のとき，$\dfrac{\partial I}{\partial x}$ が存在して $C(\Omega \times S^1)$ に属する．さらに，解 I は $\Omega \times S^1$ において x について無限回微分可能である．

定理 3 定理 1 の仮定に加えて，p が C^1 級でかつ $\dfrac{\partial I_0}{\partial \theta}$ が $C_b(\Gamma_-)$ に属すると仮定する．このとき，$\dfrac{\partial I}{\partial \theta}$ が存在して $C(\Omega \times S^1)$ に属する．

3 定理１の証明

まずは一意性を示す．I_1, I_2 を解とし，その差を I とおく．すなわち，$I := I_1 - I_2$．このとき，解の定義から I は $C_b\left((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-\right)$ に属し，次の積分方程式を満たすことが分かる:
$x \in [0,1), \theta \in (0,\pi)$ のとき，

$$I(x,\xi) = \frac{\mu_s}{\sin\theta} \int_0^x \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin\theta}(x-t)\right) \int_{S^1} p(\xi,\xi') I(t,\xi')\, d\sigma_{\xi'}\, dt. \tag{5}$$

$x \in (0,1], \theta \in (-\pi,0)$ のとき，

$$I(x,\xi) = -\frac{\mu_s}{\sin\theta} \int_x^1 \exp\left(\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin\theta}(t-x)\right) \int_{S^1} p(\xi,\xi') I(t,\xi')\, d\sigma_{\xi'}\, dt. \tag{6}$$

(5), (6) を評価することで，不等式 $\|I\|_\infty \leq \dfrac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \|I\|_\infty$ を得る．この不等式からただちに，$I = 0$ すなわち $I_1 = I_2$ がしたがう．

次に，解の存在を構成によって示す．関数列 $\{I^{(n)}\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する．$I^{(0)}$ を

- $x \in [0,1), \theta \in (0,\pi)$ のとき，$I^{(0)}(x,\xi) := \exp\left(-\dfrac{\mu_a + \mu_s}{\sin\theta} x\right) I_0(0,\xi)$.
- $x \in (0,1], \theta \in (-\pi,0)$ のとき，$I^{(0)}(x,\xi) := \exp\left(\dfrac{\mu_a + \mu_s}{\sin\theta}(1-x)\right) I_0(1,\xi)$.
- $x \in (0,1), \theta \in \{0,\pi\}$ のとき，$I^{(0)}(x,\xi) := 0$.

で定義する．$I^{(n)}$ まで定義できたとして，$I^{(n+1)}$ を

- $x \in [0,1), \theta \in (0,\pi)$ のとき，

$$I^{(n+1)}(x,\xi) := \frac{\mu_s}{\sin\theta} \int_0^x \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin\theta}(x-t)\right) \int_{S^1} p(\xi,\xi') I^{(n)}(t,\xi')\, d\sigma_{\xi'}\, dt.$$

- $x \in (0,1], \theta \in (-\pi,0)$ のとき，

$$I^{(n+1)}(x,\xi) := -\frac{\mu_s}{\sin\theta} \int_x^1 \exp\left(\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin\theta}(t-x)\right) \int_{S^1} p(\xi,\xi') I^{(n)}(t,\xi')\, d\sigma_{\xi'}\, dt.$$

- $x \in (0,1), \theta \in \{0,\pi\}$ のとき,

$$I^{(n+1)}(x,\xi) := \frac{\mu_s}{\mu_a+\mu_s}\int_{S^1} p(\xi,\xi')I^{(n)}(x,\xi')\,d\sigma_{\xi'}.$$

で定義する．このとき，　次の２つが簡単な計算により分かる．

補題 1 $I^{(n)} \in C_b\left((\Omega\times S^1)\cup\Gamma_-\right)$ と仮定する．このとき, 次の評価が成り立つ．

$$\|I^{(n+1)}\|_\infty \leq \frac{\mu_s}{\mu_a+\mu_s}\|I^{(n)}\|_\infty.$$

命題 1 $I_0 \in C_b(\Gamma_-)$ ならば, すべての $n \geq 0$ に対して, $I^{(n)} \in C_b\left((\Omega\times S^1)\cup\Gamma_-\right)$ が成り立つ．

補題１と命題１から, $I(x,\xi) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} I^{(n)}(x,\xi)$ が $(\Omega\times S^1)\cup\Gamma_-$ 上絶対一様収束し, $C_b\left((\Omega\times S^1)\cup\Gamma_-\right)$ に属することが分かる．また, この $I(x,\xi)$ が解となっていることも級数の計算により確認できる．以上より, 解の存在が示された．

4　定理２の証明

証明の概略を述べる前に, 次の２つに言及しておく．１つ目は, 定常輸送方程式 (1) の形から, $I(x,\xi)$ が $\theta \notin \{0,\pi\}$ のとき x について連続的微分可能であることは自明である, ということである．したがって, $\theta \in \{0,\pi\}$ の場合について微分可能性を議論することになる．ところが, 元の方程式からこの場合の微分可能性を議論することができない．そのため, 前節で得られた級数解を項別微分し, その級数の収束を確認することを本節の目標とする．２つ目の言及点は, １階導関数は一般に非有界になることが知られている, ということである [A]．この事情から, 先ほどと同様の一様収束評価をただちに用いることができない．そこで, 本稿では開区間 $(0,1)$ の内部にコンパクト集合 K をとり, $K\times S^1$ 上での導関数の一様収束を示す．以上の点をふまえて, 本節では次の２つの命題を示す．

命題 2 K を Ω のコンパクト部分集合とする．このとき, 任意の $n \geq 0$ に対して, $\dfrac{\partial I^{(n)}}{\partial x}$ は $K\times S^1$ 上連続 (したがって有界) である．

命題 3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial I^{(n)}}{\partial x}(x,\xi)$ は $K\times S^1$ 上絶対一様収束する．

ここで, K として閉区間 $[\delta, 1-\delta]$, $0<\delta<1/2$ のみを考える．この場合のみ議論すれば十分である．このようにとった K に対して,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n = \delta$$

を満たす正数列 $\{\delta_n\}_{n\geq 0}$ をとる．さらに, $\{\delta_n\}_{n\geq 0}$ に対応する閉区間の列 $\{K_n\}_{n\geq 0}$ を

$$K_n := \left[\sum_{m=0}^{n}\delta_m, 1-\sum_{m=0}^{n}\delta_m\right]$$

で定義する．$K\times S^1$, $K_n\times S^1$ 上の連続関数の最大値ノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_K$, $\|\cdot\|_n$ で表すことにする．このとき, 次の補題が成立する．

補題 2 $\dfrac{\partial I^{(n)}}{\partial x}$ が $K_n \times S^1$ 上連続ならば, $\dfrac{\partial I^{(n+1)}}{\partial x}$ は $K_{n+1} \times S^1$ 上連続でかつ次の不等式を満たす.

$$\left\| \frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial x} \right\|_{n+1} \leq \frac{2\mu_s}{e\delta_{n+1}(\mu_a+\mu_s)} \|I^{(n)}\|_\infty + \frac{\mu_s}{\mu_a+\mu_s} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x} \right\|_n .$$

定義より任意の $n \geq 0$ に対して $K \subset K_n$ が成り立つから, 補題 2 から命題 2 が成立することが分かる. また, 特に $\tilde{\mu}_a := \dfrac{\mu_a}{2}$, $\delta_0 := \dfrac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\mu}_a + \mu_s}\delta$, $\delta_{n+1} := \dfrac{\mu_s}{\tilde{\mu}_a+\mu_s}\delta_n$ ととれば, 次の評価が成り立つことが分かる.

$$\left\| \frac{\partial I}{\partial x} \right\|_K \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x} \right\|_n \leq \left\| \frac{\partial I^{(0)}}{\partial x} \right\|_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_s}{\mu_a+\mu_s} \right)^n + \frac{2\|I_0\|_{\Gamma_-}}{e\delta_0} \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\tilde{\mu}_a+\mu_s}{\mu_a+\mu_s} \right)^n .$$

ただし, $\|\cdot\|_{\Gamma_-}$ は Γ_- 上の最大値ノルムを表す. 右辺は有限確定するから, 命題 3 が示された.

一般の m 階導関数については, 次が成り立つ.

補題 3 任意の $m, n \geq 0$ に対して, $\dfrac{\partial^m I^{(n)}}{\partial x^m}$ が $K_n \times S^1$ 上連続ならば, $\dfrac{\partial^m I^{(n+1)}}{\partial x^m}$ は $K_{n+1} \times S^1$ 上連続でかつ次の不等式を満たす.

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\partial^m I^{(n+1)}}{\partial x^m} \right\|_{n+1} \leq & \frac{\mu_s}{\mu_a+\mu_s} \left\| \frac{\partial^m I^{(n)}}{\partial x^m} \right\|_n \\ & + \frac{\mu_s}{\mu_a+\mu_s} \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{m-k}{e\delta_{n+1}} \right)^{m-k} \left\| \frac{\partial^k I^{(n)}}{\partial x^k} \right\|_n \\ & + \frac{2\mu_s}{e(\mu_a+\mu_s)} \left(\frac{m}{e\delta_{n+1}} \right)^m \|I^{(n)}\|_\infty .\end{aligned}$$

$\{\delta_n\}_{n\geq 0}$ として, $\delta_0 = \delta_0^{(m)} := \left(1 - \left(\dfrac{\mu_s}{\tilde{\mu}_a+\mu_s} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \delta$, $\delta_{n+1} = \delta_{n+1}^{(m)} := \left(\dfrac{\mu_s}{\tilde{\mu}_a+\mu_s} \right)^{\frac{1}{m}} \delta_n^{(m)}$ をとれば, 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^m I^{(n)}}{\partial x^m}$ が $K \times S^1$ 上絶対一様収束することを示すことができる.

5 定理 3 の証明

定理 3 の証明の方針は, 定理 2 と同様である. ただし, x 方向の微分可能性とは異なり, $\theta \in \{0, \pi\}$ の場合の θ 方向微分可能性は少し複雑な計算を要する.

命題 4 $x \in (0,1), \theta \in \{0, \pi\}$ のとき,

$$\begin{aligned}\frac{\partial I^{(0)}}{\partial \theta}(x,\xi) =& 0, \\ \frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial \theta}(x,\xi) =& \frac{\mu_s}{\mu_a+\mu_s} \int_{S^1} \frac{\partial p}{\partial \theta}(\xi,\xi') I^{(n)}(x,\xi')\, d\sigma_{\xi'} \\ & - \frac{\mu_s}{(\mu_a+\mu_s)^2} \int_{S^1} p(\xi,\xi') \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x}(x,\xi')\, d\sigma_{\xi'}.\end{aligned}$$

補題 2 に対応して, θ 偏導関数に対して次の補題が成り立つ.

補題 4 $\dfrac{\partial I^{(n)}}{\partial x}$ が $K_n \times S^1$ 上連続ならば, $\dfrac{\partial I^{(n+1)}}{\partial \theta}$ は $K_{n+1} \times S^1$ 上連続でかつ次の不等式を満たす.

$$\left\| \frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial \theta} \right\|_{n+1} \le C \frac{\mu_s}{(\mu_a + \mu_s)^2 \delta_{n+1}} \| I^{(n)} \|_\infty + \frac{\mu_s}{(\mu_a + \mu_s)^2} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x} \right\|_n + \frac{2\pi \mu_s}{\mu_a + \mu_s} \left\| \frac{\partial p}{\partial \theta} \right\|_\infty \| I^{(n)} \|_\infty.$$

ただし, $C > 0$ は n と δ によらない定数.

補題 4 から次の評価が成り立つことが分かる.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial \theta} \right\|_K &\le \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial \theta} \right\|_n \\ &\le \left\| \frac{\partial I^{(0)}}{\partial \theta} \right\|_0 + \frac{2\pi \mu_s}{\mu_a + \mu_s} \left\| \frac{\partial p}{\partial \theta} \right\|_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \| I^{(n)} \|_\infty \\ &\quad + C \frac{\mu_s}{(\mu_a + \mu_s)^2 e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta_{n+1}} \| I^{(n)} \|_\infty + \frac{\mu_s}{(\mu_a + \mu_s)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x} \right\|_n.\end{aligned}$$

$\{\delta_n\}_{n \ge 0} = \{\delta_n^{(1)}\}_{n \ge 0}$ ととれば, 右辺が有限確定し, 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial I^{(n)}}{\partial \theta}$ が $K \times S^1$ 上絶対一様収束することが分かる.

参考文献

[A] D. S. Anikonov, A. E. Kovtanyuk, and I. V. Prokhorov, *Transport Equation and Tomography*, VSP, The Netherlands, (2002).