３次元双曲幾何学について

蒲谷 祐一 *

京都大学大学院理学研究科，2015 年２月

1　序

城崎の講演では３次元双曲多様体が具体的に構成できる事を中心に解説した．続いて多くの３次元多様体に双曲構造が入る事の理論的な背景，双曲化定理（Hyperbolization Theorem）について話し，最後に有限被覆に関する１次のホモロジーの振る舞いについて最近の話題を紹介した．この報告集ではあまり解説できなかった後者２つと関連した話題について述べる．

2　３次元双曲多様体

2.1　双曲幾何から

上半空間を $\mathbb{H}^3 = \{(x, y, t) \mid t > 0\}$ で定義する．計量を $(dx^2 + dy^2 + dt^2)/t^2$ で定めると，これは完備かつ断面曲率が -1 で一定である事がわかる．単連結でこのような性質を満たすリーマン多様体は等長を除いて一意である事が知られている．また $\mathbb{H}^3$ の向きを保つ等長変換群は $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$ と同型である事がわかる．

以下，多様体は向き付け可能な物のみを考える．完備かつ断面曲率が -1 で一定であるリーマン多様体を**双曲多様体**という．M を３次元の双曲多様体とすると，その普遍被覆は単連結なので $\mathbb{H}^3$ と等長になる．よって離散部分群 $\Gamma < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ を用いて $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ と表される．ここで基本群 $\pi_1(M)$ は Γ と同型になる．

本稿では計量から定まる体積が有限となる物のみを扱うことにする．３次元の場合，この条件から双曲多様体は閉多様体か境界がトーラス（$S^1 \times S^1$）からなるコンパクト多様体の内部に同相である事がわかる．（境界のトーラスに対応したエンドは**カスプ**と呼ばれる．）以降，３次元多様体と言えば，向き付け可能，コンパクト，境界はあるとすれば各成分がトーラスである物とする．そのような多様体の内部に双曲計量が入るとき，それも単に双曲多様体と言う事にする．

定理 (Mostow 剛性)**.** ３次元双曲多様体 M_1, M_2 は，$\pi_1(M_1) \cong \pi_1(M_2)$ なら等長.

よって双曲計量は存在すれば位相構造から一意に決まる．

---

*kabaya@math.kyoto-u.ac.jp, 本稿の作成に関し科研費（課題番号：23244005）の援助を感謝する．

2.2　双曲化定理

M を３次元多様体とする．M に埋め込まれた球面が必ず３次元球体の境界となるとき M は**既約**であるという．$\pi_1(M)$ の $\mathbb{Z}^2$ に同型な部分群が，必ず境界の基本群の部分群に共役となるなら，M は**アトロイダル** [1] であるという．但し M はソリッドトーラス（$D^2 \times S^1$），トーラスまたはクラインボトル上の区間バンドルではないとする．双曲多様体は既約，アトロイダル，基本群が無限である事がわかる．驚くべき事にこの逆が成り立つ．

定理 (双曲化定理)**.** 既約，アトロイダルかつ基本群が無限である３次元多様体は双曲多様体である．

この定理はハーケン多様体の場合（例えば境界付きの場合）に Thurston により示された [Thu]．証明の過程で開発された概念や手法はクライン群論，タイヒミュラー空間論，曲面のトポロジー，３次元多様体論，結び目理論といった分野に大きな影響を与えた．一般の場合は Perelman による．

3　結び目の判定

円周 S^1 の３次元球面 S^3 への埋め込みのアイソトピー類を**結び目**という．S^1 の近傍を S^3 から取り除く事で，トーラスを境界とする３次元多様体が得られる．これを**結び目の補空間**という．これは前節で出てきたハーケン多様体になっている．ハーケン多様体に関して次の事実がある．

定理 ([Hak], [Hem], [Mat])**.** [2] ２つのハーケン多様体が同相であるか判定するアルゴリズムがある．

とくに２つの結び目が同じかどうか判定する事ができる．しかし，このアルゴリズムは非常に時間がかかる物なので現実的には実行不可能である．一方でいつでも判定できる保証はないが，うまくいけば非常に速く厳密に結び目が同じかどうか判定してくれる方法がある．城崎で紹介した SnapPy [CDW] である．これは Epstein-Penner [EP] による標準分割（canonical decomposition, Euclidean decomposition）の理論に基づく．

3.1　SnapPy による判定

M を境界付き（カスプ付き）の３次元双曲多様体とする．このとき，双曲構造から標準分割という多面体分割が一意に定まる．Mostow 剛性と標準分割の一意性から，

２つの３次元双曲多様体が同相 $\Rightarrow$ それらは等長 $\Rightarrow$ それらの標準分割が組み合わせ的に同じ

が従う．逆に標準分割が同じならそれは同相を与えるので，標準分割の情報はカスプ付き双曲３次元多様体の完全な位相不変量と言える．多面体の面の貼り合わせ方は有限通りしかない事から，標準分割が組み合わせ的に同じかどうかは厳密に判定できる．よって与えられた２つの双曲３次元多様体の標準分割が分かれば，それらが同相かそうでないかが完全に判定できる．

SnapPy は標準分割を求める際に tilt と呼ばれる量 [Wee] を用いる．この tilt は数値計算で求めるので誤差があり得る．よって SnapPy の求めた標準分割が本当に標準分割かどうかは注意を要する．しかしそれが本当の標準分割でないとしても（さらに考えている多様体が双曲多様体でな

[1] Homotopically atoroidal と言われる．埋め込まれたトーラス T^2 で $\pi_1(T^2) \to \pi_1(M)$ が単射なら，それは境界にアイソトピックであるとする定義（geometrically atoroidal）もある．この定義だといくつかのザイフェルト多様体が除けないので定理の記述が変わってくる．

[2] この定理や他の様々な結果と合わせて幾何化定理から “与えられた２つの閉３次元多様体が同相かどうか判定するアルゴリズムの存在” が従う事を注意しておく．[BB+, §1.4] と [AFW] を参照．

かったとしても)，与えられた２つの多様体がこの多面体分割に関して組み合わせ的に同じなら，それらは厳密に同相であることになる．

もう一度注意しておくと SanpPy が与えられた２つの３次元多様体が同相と答えを出したなら，それは途中の数値計算に誤差があろうとなかろうとそれは厳密に正しい．一方で SnapPy が同相でないと言ったからといって，必ずしもそれが正しいとは限らない．実際 SnapPy で数え上げたカスプ付き双曲多様体のリストで重複が見つかっている [Bur]．

このようにいつでも同相かどうか判定できる保証はないのだが，大抵の場合 SnapPy による判定はうまくいく．同相でない事も別の議論を援用すれば厳密に証明できる事が多い．例えば 16 交点以下の素な結び目のリスト（1,701,936 個）の作成に成功している [HTW]．そもそも結び目の補空間が双曲多様体でないと話が始まらないのだが，双曲化定理によりほとんどの場合双曲多様体であることになる．これは特筆すべき点であると思う．

3.2 自明な結び目の判定

結び目の判定の特別な場合として，与えられた結び目が自明かどうか判定する問題が考えられる．これに関して近年面白い研究が続いている．Kuperberg [Kup] の generalized Riemann hypothesis を仮定した “Knottedness is in NP” と，Lackenby [Lac] による自明なダイアグラムまでに必要な Reidemeister 移動の回数の上界（交点数の多項式で与えられる）である．

一方 SnapPy は結び目の補空間の基本群の表示を計算してくれるが，自明な結び目の（複雑な）ダイアグラムを入力すると大体 $\mathbb{Z}$ の自明な表示を返す．Dehn の補題により結び目が自明である事と補空間の基本群が $\mathbb{Z}$ である事は同値なので，これで自明な結び目の判定が出来てしまう．これもいつでもうまくいく理論的な保証はないが，非常に速く自明な結び目を判定してくれる．

4 １次ホモロジーの増大度

最近の３次元多様体論の事件として virtual Haken 予想（[Thu] の問題 15〜18 を含む）の解決がある．関連した予想の形で言うと次のようになる．多様体 M の１次ベッチ数を $b_1(M) = \dim_{\mathbb{Q}} H_1(M;\mathbb{Q})$ で定義する．

定理 (Agol [Ago])**.** M を閉双曲３次元多様体とする．このとき $b_1(M') > 0$ となる有限被覆 $M' \to M$ が存在する．さらに $b_1(M')$ がいくらでも大きな数になるような M' がとれる．

この予想の解決に前後して有限被覆を取った時の $b_1(M)$ や，より一般に $H_1(M;\mathbb{Z})$ の振る舞いについて様々な研究があった．この節でいくつかを紹介する．以下閉多様体のみを考える．

M を閉双曲３次元多様体とする．M は $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の離散部分群 Γ を用いて $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ と表される．このとき部分群の列 $\Gamma > \Gamma_1 > \Gamma_2 > \cdots$ で

$$(1)\ [\Gamma : \Gamma_n] < \infty, \quad (2)\ \bigcap_{n\geq 1} \Gamma_n = \{1\}$$

を満たす物が存在する．（このような性質を満たす群 Γ を residually finite であると言う．）ここで $M_n = \Gamma_n\backslash\mathbb{H}^3$ とすれば $M_n \to M$ は写像度が $[\Gamma : \Gamma_n]$ の被覆写像となる．よって M_n も閉双曲３次元多様体となる．Agol の定理から b_1 がいくらでも大きい有限被覆がとれるのだが，一方で次のような例がある．

定理 ([BE], [CD])**.** (1), (2) を満たす部分群の列で全ての n について $b_1(M_n) = 0$ となる物が存在.

(1) のみを満たす部分群の列で $b_1(M_n)=0$ を満たす物は [BBW] で見つけられていた．$H_1(M_n;\mathbb{Z})$ は $\pi_1(M_n)$ のアーベル化に同型なので，$b_1(M_n)=0$ は $\pi_1(M_n)\cong\Gamma_n$ のアーベル化が有限である事と同値である事を注意しておく．

この問題は次のように幾何学的に定式化できる．M をリーマン多様体，R を正の実数とする．

$$\mathrm{inj}_x(M)=\sup\{r \mid x \text{ での } r\text{-ball が埋め込み }\},\quad \mathrm{inj}(M)=\inf_{x\in M}\{\mathrm{inj}_x(M)\}$$
$$\mathrm{thin}_R(M)=\{x\in M \mid \mathrm{inj}_x(M)<R\}$$

$\mathrm{inj}(M)$ は単射半径，$\mathrm{thin}_R(M)$ は thin part と呼ばれる．ここで $\mathrm{inj}(M)>R$ なら $\mathrm{thin}_R(M)=\emptyset$ である事がわかる．M が閉双曲 3 次元多様体の場合，R が十分小さければ $\mathrm{thin}_R(M)$ は短い閉測地線の近傍からなる事が知られている（Margulis の補題）．

問題 (Cooper (Kirby's list 3.58))**.** $b_1(M_n)=0$ となる閉双曲 3 次元多様体の列 $\{M_n\}$ で $\mathrm{inj}(M_n)$ がいくらでも大きくなる物が存在するか？

ここで M_n はある多様体の被覆から得られると特に仮定していない事を注意しておく．部分群の列が上の (2) をみたせば，任意の $R>0$ に対し十分大きな n を取れば $\mathrm{inj}(M_n)>R$ とできるので，定理 ([BE], [CD]) はこの問題に肯定的な解答を与える．$b_1(M_n)=0$ の条件を $H_1(M_n;\mathbb{Z})=0$ に替えると未解決であるらしいが [BD]，次の事が示されている．

定理 (Brock-Dunfield [BD])**.** 任意の $R>0$ に対し，$H_1(M_n;\mathbb{Z})=0$ となる双曲 3 次元多様体の列 $\{M_n\}$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{vol}(\mathrm{thin}_R(M_n))}{\mathrm{vol}(M_n)}=0$ となる物が存在．

逆に閉 3 次元双曲多様体の列 $\{M_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{vol}(\mathrm{thin}_R(M_n))}{\mathrm{vol}(M_n)}=0$ を満たす時，$\{M_n\}$ は $\mathbb{H}^3$ に *Benjamini-Schramm* **収束**すると言う [AB+]．

定理 (ABBGNRS [AB+])**.** 閉双曲 3 次元多様体の列 $\{M_n\}$ が $\mathbb{H}^3$ に Benjamini-Schramm-収束するなら $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_1(M_n)}{\mathrm{vol}(M_n)}=0$.

これらはもっと一般の Lie 群の cocompact lattice に関する定理で，対応する対称空間の L^2-ベッチ数に収束する事を示している．

一方で $|H_1(M_n;\mathbb{Z})_{\mathrm{tor}}|$ の増大度に関する研究もある [Le]．また数論の方でも最近，数論的離散部分群のホモロジーのトーションに興味が持たれているようである（例えば [CV]，約 250 ページ）．最後に良く耳にする予想を挙げておく．

予想 (Bergeron-Venkatesh [BV])**.** $\Gamma<\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ を数論的部分群とする．有限指数部分群の列 $\Gamma>\Gamma_1>\cdots$ で $\bigcap_{n\geq 1}\Gamma_n=\{1\}$ を満たすものとする．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log|H_1(\Gamma_n\backslash\mathbb{H}^3;\mathbb{Z})_{\mathrm{tor}}|}{\mathrm{vol}(\Gamma_n\backslash\mathbb{H}^3)}=\frac{1}{6\pi}$.

参考文献

[AB+] M.Abert, N.Bergeron, I.Biringer, T.Gelander, N.Nikolov, J.Raimbault, and I. Samet, *On the growth of L^2-invariants for sequences of lattices in Lie groups*, arXiv:1210.2961

[Ago] I. Agol, *The virtual Haken conjecture*, with an appendix by Agol, Groves, and Manning, Doc. Math. 18 (2013), 1045-1087. arXiv:1204.2810

[AFW] M. Aschenbrenner, S. Friedl, and H. Wilton, *Decision problems for 3-manifolds and their fundamental groups*, arXiv:1405.6274

[BBW] M. Baker, M. Boileau, and S. Wang, *Towers of covers of hyperbolic 3-manifolds*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 32 (2001) 35-43.

[BV] N. Bergeron and A. Venkatesh, *The asymptotic growth of torsion homology for arithmetic groups*, J. Inst. Math. Jussieu 12 (2013), no. 2, 391-447. arXiv:1004.1083

[BB+] L. Bessières, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot, and J. Porti, *Geometrisation of 3-Manifolds*, Tracts in Mathematics 13, European Mathematical Society 2010.

[BE] N. Boston and J. Ellenberg, *Pro-p groups and towers of rational homology spheres*, Geom. Topol. 10 (2006), 331334. arXiv:0902.4567

[BD] J. Brock and N. Dunfield, *Injectivity radii of hyperbolic integer homology 3-spheres*, Geometry & Topology 19 (2015), 497-523. arXiv:1304.0391

[Bur] B. Burton, *A duplicate pair in the SnapPea census*, arXiv:1311.7615

[CD] F. Calegari and N. Dunfield, *Automorphic forms and rational homology 3-spheres*, Geom. Topol. 10 (2006), 295-329. arXiv:math/0508271

[CDW] M. Culler, N. Dunfield, and J. Weeks, *SnapPy*, `http://snappy.computop.org`

[CV] F. Calegari and A. Venkatesh, *A torsion Jacquet-Langlands correspondence*, arXiv:1212.3847

[EP] D. Epstein and R. Penner, *Euclidean decompositions of noncompact hyperbolic manifolds*, J. Differential Geom. 27 (1988), 67-80.

[Hak] W. Haken, *Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten*, I. Math. Z. 80 (1962) 89-120.

[Hem] G. Hemion, *On the classification of homeomorphisms of 2-manifolds and the classification of 3-manifolds*, Acta Math. 142 (1979), no. 1-2, 123-155.

[HTW] J. Hoste, M. Thistlethwaite, and J. Weeks. *The first 1,701,936 knots*, The Mathematical Intelligencer 20(4) (1998), 33-48.

[Kup] G. Kuperberg, *Knottedness is in NP, modulo GRH*, arXiv:1112.0845

[Lac] M. Lackenby, *A polynomial upper bound on Reidemeister moves*, arXiv:1302.0180.

[Le] T. Le, *Growth of homology torsion in finite coverings and hyperbolic volume*, arXiv:1412.7758

[Mat] S. Matveev, *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, Springer, 2003.

[Thu] W. Thurston, *Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. 6-3 (1982), 357-381.

[Wee] J. Weeks, *Convex hulls and isometries of cusped hyperbolic 3-manifolds*, Topology Appl. 52-2 (1993), 127-149.