合同関係で記述される算術代数系の分類

井澤　昇平 *

東北大学大学院理学研究科数学専攻，2015 年 2 月

1　主結果

Universal Algebra（普遍代数学、一般代数系などと訳される）は代数系の一般的な性質を研究する数学の一分野である。本稿で言う代数系のもとになるイメージは、台集合と呼ばれる一つの集合にいくつかの演算を付加した構造のことである。

群や環、束といった（背景に何らかの動機があって着目した）個々の代数系を考察する上では、集合と演算の対というとらえ方は極めて自然である。しかし代数系の構造についての一般的な研究を行なうという立場からすると、ちょっとした修正を行なった方が自然な場合がある。

例 1.1. $(B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ をブール束とする。このとき

$$\begin{aligned} a + b &:= (a \wedge b) \vee a \vee b \\ a \cdot b &:= a \wedge b \\ -a &:= a \end{aligned}$$

とおくと $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ は $x^2 = x$ をみたす可換環（ブール環）になる。逆に $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ をブール環とするとき、

$$\begin{aligned} a \vee b &:= a + b + (a \cdot b) \\ a \wedge b &:= a \cdot b \\ \neg a &:= 1 + a \end{aligned}$$

とおくと $(R, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ はブール束となる。

よく知られたこの事実から、（代数構造としては）ブール束とブール環は本質的に同じものであると感じる人が多いであろう。

このような同一視を統一的に行なおうとするのなら、その代表系としては“演算の合成”に閉じたものをとるのが自然なように思われる。そのような考えに基づき本稿では「代数系」を次のように定義する。

定義 1.2. 集合 A と A 上の演算の集合 $\mathrm{Clo}(A)$ の対 $(A, \mathrm{Clo}(A))$ で、次の条件をみたすものを代数系 という。

1. 射影演算 $\pi_{n,i} : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i$ は $\mathrm{Clo}(A)$ に属する。

2. 合成に閉じている、すなわち $f, g_1, \cdots, g_n \in \mathrm{Clo}(A)$，$f : A^n \to A, g_i : A^m \to A$ なら $[(x_j) \mapsto f(g_i(x_j)_j)_i] \in \mathrm{Clo}(A)$ となる。

*sa9m02@math.tohoku.ac.jp

以下では特に必要がない場合には簡単のため台集合を表す文字のみで代数系を表し、$\mathrm{Clo}_n(A)$ で代数系 A の n 項演算全体の集合を、$\mathrm{Clo}(A)$ で A の全ての項数の演算の全体の集合を表すことにする。また、このような場合 $\mathrm{Clo}(A)$ に属するものを A の演算と言うことがある。

他の数学の諸分野と同様に、一般代数系でも研究対象である代数系を「何らかの良い形に分類を行なう」ということは重要な目標の一つである。分類の良さの基準の一つに、構造の似たものが一つのグループにまとまっていることが挙げられると思う。

被覆理論と呼ばれる一般代数系の下位分野は、構造の類似性を比較的良く反映する分類を目指すものの一つである。今回、第１２回城崎新人セミナーでは被覆理論の概要と、その応用例としてタイトルにある代数系たちの分類結果について紹介した。

2　代数系の圏構造

与えられた二つの代数系に対し、それらの構造の類似の度合いを測る基準の一つに、それぞれの「生成する代数系のクラスの（演算を保存する写像を射とする）圏」が圏同値になるという条件を考えることができる。

圏構造の情報に加えて、各代数系に台集合を与える関手の情報を付加すると、代数系のクラスとしての構造を完全に決めることができることが知られている。その意味で圏構造は“代数系に依存しない情報を全て含んでいる”と標語敵にいうことができるのである。

このことを正確に述べると次のようになる。

定義 2.1. $(A, \mathrm{Clo}(A))$ を代数系、X を集合とする。$\mathrm{Clo}(A)$ の X への 作用 とは $\tau = (\tau_n : \mathrm{Clo}_n(A) \to X^{X^n})_n$ で以下をみたすもののことをいう。

1. $\tau(\pi_{n,i}) = [(x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i]$.
2. $\tau(f \circ (g_i)) = [(x_j)_{j \leq m} \mapsto \tau(f)(\tau(g_i)(x_j))]$.

(X, τ) を $\mathrm{Clo}(A)$ 代数系（または誤解がない場合 A 代数系）という。$\mathrm{Clo}(A)$ 代数系の全体を $\mathcal{V}(A)$ と書く。また $\mathcal{V}(A)$ に属する代数系を対象とし、その間の演算を保存する写像を射とする圏を $\mathrm{Cat}(\mathcal{V}(A))$ と書く。

定理 2.2. A, B を代数系とする。このとき次は同値である。

1. A と B は同型である、すなわち

$$\forall \mathbb{Z}_{\geq 0} \forall f \in \mathrm{Clo}_n(A);\ [(b_1, \ldots, b_n) \mapsto \varphi(f(\varphi^{-1}(b_1), \ldots, \varphi^{-1}(b_n)))] \in \mathrm{Clo}_n(B)$$

   となる全単射 $\varphi : A \to B$ が存在する。

2. 次を可換にし、$\varphi(A) = B$ となる圏同値 $\varphi : \mathrm{Cat}(\mathcal{V}(A)) \to \mathrm{Cat}(\mathcal{V}(B))$ が存在する。

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cat}(\mathcal{V}(A)) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathrm{Cat}(\mathcal{V}(B)) \arrow[dl, "F'"] \\ & \mathrm{Set} & \end{tikzcd}$$

   ここで $F : \mathcal{V}(A) \to \mathrm{Set}$, $F' \mathcal{V}(B) \to \mathrm{Set}$ は台集合を対応させる忘却関手である。

3 被覆理論の概要

被覆理論の枠組みに関しては第 9 回の城崎新人セミナーにおける報告集において、既に解説を行なった [5] が、本稿のみでもある程度内容が分かるよう、最低限の解説を以下に述べる。

被覆理論とは

- べき等演算により代数系 A をより小さな代数系 $U_1, \cdots, U_n$ に“分解”する
- 代数系の族 $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ が与えられたときに、分解が $\mathcal{U}$ に一致する代数系の分類を与える

という分解と合成を通じて代数系の性質を調べる手法である。この合成はさらに

- 行列積構成：与えられた代数系の族の直積集合に、各成分への“制限”が持つ演算はもとの代数系の演算に一致するような代数系の構成
- 圏同値変形：与えられた代数系と“生成する”代数系のクラスの圏構造を変えない代数系の構成

の二つの段階に分けることができる。そのため代数系の圏構造を壊さず、様々な代数的性質を捉えることができるのである。

以下、後に必要な定義と性質を天下り的に列挙する。

定義 3.1. A を代数系とする。

1. $e \in \mathrm{Clo}_1(A)$ が <u>べき等的</u> であるとは $e(e(x)) = e(x)$ が全ての $x \in A$ に対して成り立つことをいう。

2. e が A のべき等演算のとき $e(A)$ を e による <u>べき等縮約</u> という。ただし
$$\mathrm{Clo}_m(e(A)) := \{f \mid f \in \mathrm{Clo}_m(A), f(A^m) \subset e(A)\}$$
とする。

3. A のべき等縮約の集合 $\{U_1, \ldots, U_n\}$ が A を <u>被覆する</u> とは $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $t \in \mathrm{Clo}_l(A)$, $s_1, \ldots, s_l \in \mathrm{Clo}_1(A)$, $i_1, \ldots, i_l \in \{1, \ldots, n\}$ で
$$t(e_{i_1}s_1(x), \ldots, e_{i_l}s_l(x)) = x \qquad (\forall x \in A)$$
をみたすものが存在することをいう。

4. A のべき等縮約 $U_1, \cdots, U_l$ に対し、以下で定義される代数系を <u>行列積</u> と言い、$U_1 \boxtimes \cdots \boxtimes U_l$ と書く。
   - 台集合は直積集合 $\prod_{j \leq l} U_j$.
   - m 項演算は l 個の A の lm 項演算 t_k によって $((x_{ij})_{j \leq l})_{i \leq m} \mapsto (t_k(x_{ij})_{i,j})_k$ と書けるもの全体。

5. どんな A の被覆も A を含むとき、A は <u>既約</u> であるという。

6. $\mathcal{U}_1$ と $\mathcal{U}_2$ を A の被覆とする。$\mathcal{U}_1$ が $\mathcal{U}_2$ の細分であるとは任意の $U_1 \in \mathcal{U}_1$ に対し $U_2 \supset U_1$ となる $U_2 \in \mathcal{U}_2$ が存在することをいう。

7. A の被覆 $\mathcal{U}$ が極小であるとは、$\mathcal{U}$ の真部分集合は A を被覆せず、$\mathcal{U}$ の任意の細分 $\mathcal{U}'$ に対し、$\mathcal{U}$ が $\mathcal{U}'$ の細分になっていることをいう。

台集合が有限な代数系に関しては最小な被覆の存在が保証される。

定理 3.2. A を有限代数系とする。このとき次が成り立つ。

1. A の極小被覆は存在し、そこに属する全てのべき等縮約は既約である。
2. $\mathcal{U}=\{U_1,\dots,U_n\}$ および $\mathcal{U}'=\{U'_1,\dots,U'_m\}$ を A の極小被覆とすると $n=m$ であり、$\{1,\dots,n\}$ 上の置換 σ を適当にとると $U_i \simeq U'_{\sigma(i)}$ が全ての i について成り立つ。さらに $U_1 \boxtimes \cdots \boxtimes U_n \simeq U'_1 \boxtimes \cdots \boxtimes U'_n$ が成り立つ。

さらに有限代数系 A の極小被覆 $\{U_1,\dots,U_n\}$ の行列積 $U_1 \boxtimes \cdots \boxtimes U_n$ の構造を A の標準化と言い、$\mathrm{Ess}(A)$ と書くことにする。このとき次が成り立つ。

定理 3.3. A を有限代数系とする。このとき $\mathrm{Ess}(B) \simeq A$ となる有限代数系 B が存在するならば $A \simeq \mathrm{Ess}(A)$ が成り立つ。特に全ての有限代数系に対して $\mathrm{Ess}(\mathrm{Ess}(A)) \simeq \mathrm{Ess}(A)$ が成り立つ。

これらの事実に基づき、有限代数系の分類を次の 3 つの段階に分けることができる。

1. 既約代数系の分類をする。
2. 与えられた既約代数系の族に対し、その行列積として得られる標準代数系の分類をする。
3. 与えられた標準代数系に対し、標準化がそれと一致する代数系の分類をする。

また最後の段階に関しては該当する代数系を探す範囲を限定する基本的事実として次のことが知られている。

命題 3.4. 有限代数系 A に対し、十分大きな $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ をとれば $(\mathrm{Ess}(A))^{\boxtimes n}$ には A と同型なべき等縮約が存在する。

また上で導入された諸概念と代数系の圏の構造との関連を示す基本的な事実として次のことが挙げられる。次の事実はべき等縮約やその行列積を取る操作が関手になることを意味する。

命題 3.5. $(A, \mathrm{Clo}(A))$ を代数系とし $e_1,\dots,e_n \in \mathrm{Clo}_1(A)$ をべき等演算、$X \in \mathcal{V}(A)$ とする。このとき次が成り立つ。

- e_i の X への作用はべき等的、すなわち $e_i(e_i(x))=e_i(x)$ が全ての $x \in X$ に対して成り立つ。
- 直積集合 $e_1(X)\times\cdots\times e_n(X)$ には自然に $e_1(A)\boxtimes\cdots\boxtimes e_n(A)$ 代数系の構造が入る。(これを $e_1(X)\boxtimes\cdots\boxtimes e_n(X)$ と書き $e_i(X)$ たちの行列積ということにする。)
- $\varphi : X \to Y$ が A 代数系の射のとき、次の写像写像 $\varphi' : e_1(X)\boxtimes\cdots\boxtimes e_n(X) \to e_1(Y)\boxtimes\cdots\boxtimes e_n(Y)$
$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto (\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n))$$
は $e_1(A)\boxtimes\cdots\boxtimes e_n(A)$ 代数系の射となる。
- 上述の対応 $X \mapsto e_1(X)\boxtimes\cdots\boxtimes e_n(X)$ と $\varphi \mapsto \varphi'$ は $\mathrm{Cat}(\mathcal{V}(A))$ から $\mathrm{Cat}(\mathcal{V}(e_1(A)\boxtimes\cdots\boxtimes e_n(A)))$ への関手となる。

命題 3.6. A を代数系、$e_1,\dots,e_n$ を A のべき等演算とする。このとき $\{e_1(A),\dots,e_n(A)\}$ が A の被覆である必要十分条件は上述の関手 $\mathcal{V}(A) \to \mathcal{V}(e_1(A)\boxtimes\cdots\boxtimes e_n(A))$ が圏同値であることである。

以上が被覆理論の枠組みの概要である。

台集合が有限な代数系に限ればべき等縮約の族への分解は具体的な記述が可能である（べき等縮約が有限個しかないため、個々の有限代数系に対しては原理的には極小被覆が求められる）。そのため、（特に）有限代数系の記述や性質の研究に有用であることが期待されるのである。

4　合同関係で記述される算術代数系の分類

発表の後半では既約な代数系の族が、全ての演算を持つ代数系（感覚的には生成する代数系のクラスが“最も単純な”構造をしている、ということと同値である）のみからなる場合についての考察結果を紹介した。そのような代数系は被覆理論の言葉とは独立な条件によっても特徴付けることができ、被覆理論とは独立な結果を導かれる。その結果を述べて本稿を終わりにしたいと思う。

4.1　Primal 代数系で被覆される代数系の代数的特徴付け

この小節では、分類を行なう代数系について、被覆理論の用語を用いない定式化と、被覆理論を用いた特徴付けを述べる。

定義 4.1. A を代数系とする。$\alpha \subset A^2$ が次の条件をみたす A の同値関係であるとき、α は A の合同関係であるという：任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $f \in \mathrm{Clo}_n(A)$ および $a_i, b_i \in A$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ に対し

$$(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \alpha \implies (f(a_1, \ldots, a_n), f(b_1, \ldots, b_n)) \in \alpha.$$

（以下この条件を f は α と整合的であるという。）

A の合同関係の全体を $\mathrm{Con}(A)$ と書く。

定義 4.2. 代数系 A が Arithmetical であるとは次の 2 条件が成り立つことをいう：

- $\mathrm{Con}(A)$ は包含関係に関して分配束をなす。
- 任意の $\alpha, \beta \in \mathrm{Con}(A)$ に対し、

  $$\alpha \circ \beta := \{(a, c) \in A^2 \mid \exists b \in A; (a, b) \in \alpha, (b, c) \in \beta\}$$

  は α と β の $\mathrm{Con}(A)$ における上限 $\alpha \vee \beta$ と一致する。

定義 4.3. 有限代数系 A は

$$\mathrm{Clo}_n(A) = \{f : A^n \to A \mid f \text{ は全ての } \mathrm{Con}(A) \text{ の元と整合的 }\}$$

となるとき congruence primal であるという。特に $\mathrm{Con}(A) = \{\Delta_A, A^2\}$, $|A| \geq 2$ なる congruence primal 代数系を primal 代数系という。

定理 4.4. 有限代数系が arithmetical かつ congruence primal であるための必要十分条件は、極小被覆に属する全ての代数系が primal であることである。

4.2 Primal 代数系の行列積の分類

前節で述べたように、代数系の分類は標準代数系を分類する、それぞれの標準代数系に対して標準化がそれになる代数系を分類する、という手順を踏めばよい。本小節では Primal 代数系で被覆される標準代数系の分類を行なう。与えられた標準化を持つ代数系の記述は次節にて述べる。

記号 4.5. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。

1. 次の条件をみたす $\{0,1\}^n$ 上の clone C の全体を E_n と書く：

   (a) 写像 $f_1, \ldots, f_n \colon \{0,1\}^m \to \{0,1\}$ により

   $$\left(\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_{1m} \\ \vdots \\ x_{nm} \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_{11}, \ldots, x_{1m}) \\ \vdots \\ f_1(x_{n1}, \ldots, x_{nm}) \end{pmatrix}$$

   と書かれる演算は C に属する。

   (b) $(\{0,1\}^n, C)$ の極小被覆は n 個の二点 primal 代数系からなる。

2. n 点集合 $\{1, \ldots, n\}$ 上の順序関係（反射律、反対称律、推移律をみたす二項関係）の全体を O_n と書く。

補足 4.6. $C \in E_n$ に対し、$\{\{0\}^{i-1} \times \{0,1\} \times \{0\}^{n-1}\} \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$ は $(\{0,1\}^n, C)$ の極小被覆となる。

定理 4.7. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、対応 $\leq \mapsto C_{\leq}$ は O_n から E_n への全単射となる。ただし $C_{\leq}$ は $\{0,1\}^n$ 上の演算で、“第 i 成分の値は i より $\leq$ に関して小さい成分のみで決まる”ものの全体である。より正確に言えば次の通り：P_i で $\{0,1\}^n$ の第 i 成分の $\{0,1\}$ を表すことにする。$f \colon (\prod P_i)^m \to \prod P_i$ が $C_{\leq}$ に属するのは $(f_1, \ldots, f_n)$（$f_{i_0} \colon (\prod_{i \leq i_0} P_i)^m \to P_{i_0}$）によって次のように記述されるときである。

$$(f_1, \ldots, f_n) \colon \left(\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_{1m} \\ \vdots \\ x_{nm} \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_{ij})_{i \leq 1, j \in \{1, \ldots, m\}} \\ \vdots \\ f_n(x_{ij})_{i \leq n, j \in \{1, \ldots, m\}} \end{pmatrix}$$

4.3 与えられた標準化を持つ代数系の記述

本小節では $E_{\leq} := (\{0,1\}^n, C_{\leq})$ を標準化とする代数系がどのようなものであるのかを記述する。命題 3.4 によって、標準化が $E_{\leq}$ に一致するものは $E_{\leq}$ の行列べきのべき等縮約にしかないので、その範囲を調べればよい。

以下、n, m は固定された正整数、$\leq$ は $\{1, \ldots, n\}$ 上の順序関係、P_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ は二点 primal 代数系、$E_{\leq} = P_1 \boxtimes \cdots \boxtimes P_n = (\{0,1\}^n, C_{\leq})$, $Q_i = P_i^{\boxtimes m}$, $A = E_{\leq}^{\boxtimes m}$ とする。

A は自然に $Q_1 \boxtimes \cdots \boxtimes Q_n$ と同一視することができる。

命題 4.8. $U \subset A$ が A のべき等縮約となるのは次が成り立つときである。

$$\forall a \in A \ \left[(\forall i \in I; \pi_{\leq i}(a) \in \pi_{\leq i}(U)) \Rightarrow a \in U\right].$$

ここで $\pi_{\leq i}$ は射影 $A \to \prod_{j \leq i} Q_j$ を表す。

定理 4.9. A のべき等縮約 U に対し、$\mathrm{Ess}(U) = E_{\leq}$ となるのは次が成り立つときである。

$$\forall i \in I \exists a \in \pi_{<i}(U); |\{x \in Q_i \mid (a, x) \in \pi_{\leq i}(U)\}| \geq 2.$$

ただし $\pi_{<i}$ は射影 $A \to \prod_{j<i} Q_j$ である。

この定理により、標準化が $E_{\leq}$ となる代数系は全て具体的に記述することができる。また標準化が $E_{\leq}$ となる代数系が二つ与えられたとき、それらが同型となる条件は次で与えられる。

定理 4.10. m_1, m_2 を正整数、$A_i = E_{\leq}^{m_i}$ $(i = 1, 2)$、U_i を A_i のべき等縮約とする。U_1 と U_2 とが同型となるのは

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \forall a, b \in U_1 \, [\pi_{\leq i}(a) = \pi_{\leq i}(b) \Rightarrow \pi_{\leq i}(f(a)) = \pi_{\leq i}(f(b))]$$

をみたす全単射 $f : U_1 \to U_2$ が存在するときである。

これらの定理により、congruence primal arithmetical 代数系は具体的な記述ができるのである。

参考文献

[1] László Zádori, Relational sets and categorical equivalence of algebras, Int. J. Algebra Comput. **7**, No.5(1997) 561-576

[2] K. Denecke, O. Lüders. Categorical equivalence of varieties and invariant relations, Algebra Universalis 46(2001), 105-118.

[3] Keith A. Kearnes. Tame Congruence Theory is a localization theory, Lecture Notes from "A Course in Tame Congruence Theory" Workshop, Budapest, 2001.

[4] Mike Behrisch. Relational Tame Congruence Theory and subalgebra primal algebras. Master's thesis, Dresden University of Technology, 2009.

[5] 井澤昇平、代数系のべき等既約分解、第 9 回城崎新人セミナー報告集、2012, 169-173

[6] Shohei Izawa, Composition of matrix products and categorical equivalence, Algebra Universalis **69** (2013), 327-356.