絶対値べき乗型非線形項を持つ非線形シュレディンガー方程式の解のライフスパンについて

成亥 隆恭 *

京都大学 理学研究科，2015 年 2 月

1 導入

本研究は, 京都大学理学研究科学振 PD の池田正弘氏との共同研究である. 次の非線形シュレディンガー方程式について考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \mu |u|^p, & (t,x) \in [0,T(\lambda)) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = \lambda f(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{NLS}$$

ここで, $u = u(t,x)\colon [0,T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ は未知関数で, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ とする. また $p > 1$ とし, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする. λ は正のパラメータで, 初期値の大きさを表し, $f = f(x)$ は与えられた複素数値関数で, 初期値の形状を表す.

先ず, 解とそのライフスパンを定める.

定義 1.1 (L^2-解とそのライフスパン)**.** $u\colon [0,T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ が *(NLS)* の L^2-解であるとは, 以下の *(1)* と *(2)* が成り立つことをいう.

(1). u が関数空間 $C([0,T); L^2(\mathbb{R}^d)) \cap L_t^{\frac{4(p+1)}{d(p-1)}}(0,T; L_x^{p+1}(\mathbb{R}^d))$ に属する.

(2). u が $u(0,x) = \lambda f(x)$ 及び積分方程式

$$u(t,x) = e^{it\Delta} u(0,x) - i\mu \int_0^t e^{i(t-t')\Delta} |u(t',x)|^p dt',$$

を満たす. ここで $e^{it\Delta} = \mathcal{F}^{-1} e^{it|\xi|^2} \mathcal{F}$ は自由シュレディンガー発展群を表す. *(*$\mathcal{F}$ はフーリエ変換を表す.*)*

また L^2-解のライフスパンを

$$T(\lambda) = T(\lambda, f) := \sup\{T \in (0,\infty]; [0,T) \text{ 上で (NLS) の } L^2\text{-解 } u \text{ が存在する.}\},$$

と定める.

時間局所的な L^2-解の存在が, 堤氏 [4] および Cazenave–Weissler 氏ら [1] によって示された.

定理 1.1 ([4, 1])**.** *$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする. $1 < p \le 1 + 4/d$ のとき, ある時刻 $T > 0$ が存在し, (NLS) の $[0,T)$ 上の L^2-解 u が唯一つ存在する.*

本研究の目的は, 局所的な解が時間大域的に存在する (つまり $T(\lambda) = \infty$) か, それとも有限時間で爆発する ($T(\lambda) < \infty$) かを調べ, 更に解が有限時間で爆発する場合にはその解のライフスパンが上からどのように評価されるかを調べることである.

*inui@math.kyoto-u.ac.jp

2　先行研究

次に (NLS) に関する先行研究について述べる．今後, 簡単のため $\mu=1$ の場合のみ考えることにする．$\mu\neq 1$ の場合にも同様の結果が得られる．[3] によって, $1<p<1+4/d$ の場合, L^2 ノルムがどんなに小さい初期値に対しても, 有限時間で爆発する L^2-解の存在が知られている．またそのときのライフスパンの上からの評価も得られた．より正確には次の定理が知られている．

定理 2.1 ([3])**.** $1<p<1+4/d,\ \lambda>0$ とする．$d/2<k<2/(p-1)$ とし, 初期形状 $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ が次の条件を満たすとする．

$$-\mathrm{Im}f(x)\geq\begin{cases}0, & |x|\leq 1,\\ |x|^{-k}, & |x|>1.\end{cases}\tag{1}$$

このとき, 十分小さい λ に対して, L^2-解のライフスパン $T(\lambda)$ は次の評価を満たす．

$$T(\lambda)\leq C\lambda^{-1/\kappa}.$$

ただし, C は λ に依らない正の定数で, $\kappa:=1/(p-1)-k/2$ である．

また Cazenave–Weissler 氏ら [1] により, $p=1+4/d$ の場合には初期値の L^2 ノルムが小さい場合には局所 L^2-解が大域解になることが知られている．

定理 2.2 ([1])**.** $p=1+4/d$ 及び $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき十分小さい λ に対して, $T(\lambda)=\infty$ となる．即ち局所 L^2-解は大域的に存在する．

そこで, 以下の 3 つの未解決問題について考える．

問題 1. $1<p<1+4/d$ の場合, 初期値が大きい場合のライフスパンの上から評価はどうなるか？

問題 2. $p=1+4/d$ の場合, 初期値が大きい場合にも L^2-解が大域的に存在するか？

問題 3. $p>1+4/d$ の場合, そもそも局所的な解が存在するか？

本研究により, この 3 つの問題に対して以下のような解答を得ることができた．

3　主結果

3.1　問題 1, 2 について

先ず, $1<p\leq 1+4/d$ の場合を考える．この場合には, 以下のように, 初期値が大きい場合には, 有限時間で爆発する L^2-解が存在することがわかった．またそのときのライフスパンの評価も得ることができた．

定理 3.1 ([2])**.** $1<p\leq 1+4/d$ のとき, $k<d/2(\leq 2/(p-1))$ を満たし, かつ, 初期形状 f が以下の条件を満たしているとする．

$$-\mathrm{Im}f(x)\geq\begin{cases}|x|^{-k}, & |x|\leq 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}\tag{2}$$

このとき, 十分大きい λ に対して, L^2-解の最大存在時間 $T(\lambda)$ は次の評価を満たす．

$$T(\lambda)\leq C\lambda^{-1/\kappa}.$$

ここで, C は λ に依らない正の定数で, $\kappa=1/(p-1)-k/2$ である．特に解のノルムが有限時間で発散する．

3.2 問題 3 について

次に $p > 1 + 4/d$ の場合について考える. 以下のように弱い意味での解, 弱解を定める.

定義 3.1 (弱解)**.** u が $[0,T)$ の *(NLS)* の弱解であるとは, 以下の *(1)* と *(2)* が成り立つことをいう.

(1). $u \in L^p_{loc}([0,T) \times \mathbb{R}^d)$.

(2). 任意の $\varphi \in C_0^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^d)$ に対して, 次の等式が成り立つ.

$$\int_{[0,T)\times\mathbb{R}^d} u(-i\partial_t\varphi + \Delta\varphi)dxdt = i\lambda\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(0,x)dx + \int_{[0,T)\times\mathbb{R}^d} |u|^p\varphi dxdt.$$

注意 3.1. $1 < p \leq 1 + 4/d$ の場合, *(NLS)* の L^2-解は弱解になっている.

このとき, 次の定理が得られる.

定理 3.2 ([2])**.** $p > 1 + 4/d$ のとき, $2/(p-1) < k < d/2$ を満たし, かつ, 初期形状 f が *(2)* の条件を満たしているとする. このとき, 或る $T > 0$ と $[0,T)$ 上の弱解が存在したとすると, $\lambda = 0$ である.

これは $p > 1 + 4/d$ においては局所的な弱解が一般には存在しないことを意味している.

4 主結果の証明

テスト関数 $\eta = \eta(t) \in C_0^\infty([0,\infty))$ と $\phi = \phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を $0 \leq \eta, \phi \leq 1$ かつ

$$\eta(t) := \begin{cases} 1 & (0 \leq t < 1/2), \\ 0 & (t \geq 1), \end{cases} \qquad \phi(x) := \begin{cases} 1 & (0 \leq |x| < 1/2), \\ 0 & (|x| \geq 1), \end{cases}$$

を満たすように定める. また $\tau > 0$ に対して

$$\psi_\tau = \psi_\tau(t,x) := \eta_\tau(t)\phi_\tau(x) := \eta(t/\tau)\phi(x/\sqrt{\tau}),$$

と定める. 以下では原点中心, 半径 $r > 0$ の開球を $B(r) := \{x \in \mathbb{R}^d; |x| < r\}$ で表すことにする.
主結果の証明において, 次の補題が重要な役割を果たす.

補題 4.1. $l \in \mathbb{N}$ を $l \geq 2q + 1$ を満たすものとする. ただし $q := p/(p-1)$*(*p *のヘルダー共役指数)* とする. また $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ とし, u を $[0,T)$ 上の *(NLS)* の弱解とする. このとき或る定数 $C = C(d,p,l) > 0$ が存在して, 任意の $\tau \in (0,T)$ に対し

$$-\lambda\int_{B(\sqrt{\tau})} \mathrm{Im} f(x)\phi_\tau^l(x)dx \leq C\tau^{(d+2)/2-q} \tag{3}$$

が成り立つ.

$\langle$ 証明 $\rangle$. $\tau \in (0,T)$ に対して

$$I(\tau) := \int_{[0,\tau)\times B(\sqrt{\tau})} |u(t,x)|^p\psi_\tau^l(t,x)dxdt, \quad J(\tau) := \int_{B(\sqrt{\tau})} f(x)\phi_\tau^l(x)dx, \tag{4}$$

と定める. u が $[0,T)$ 上の弱解であり, $\psi_\tau^l \in C_0^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^d)$ なので,

$$I(\tau)+i\lambda J(\tau)=\int_{[0,\tau)\times B(\sqrt{\tau})}(-iu)\partial_t(\psi_\tau^l)dxdt+\int_{[0,\tau)\times B(\sqrt{\tau})}(-u)\Delta(\psi_\tau^l)dxdt. \tag{5}$$

(5) の実部をとると,

$$\begin{aligned} I(\tau)-\lambda\mathrm{Im}J(\tau)&=\int_{[0,\tau)\times B(\sqrt{\tau})}(\mathrm{Im}u)\partial_t(\psi_\tau^l)dxdt+\int_{[0,\tau)\times B(\sqrt{\tau})}(-\mathrm{Re}u)\Delta(\psi_\tau^l)dxdt \\ &=: K_1+K_2. \end{aligned} \tag{6}$$

先ず K_1 について評価する. $l/q-1\geq 0$ とヘルダーの不等式より,

$$\begin{aligned} K_1&\leq l\tau^{-1}\int_{[0,\tau)\times B(\sqrt{\tau})}|u|\eta_\tau^{l-1}\phi_\tau^l|\eta'(t/\tau)|dxdt\leq C\tau^{-1}\int_{[0,\tau)\times B(\sqrt{\tau})}|u|\psi_\tau^{l/p}dxdt \\ &\leq C\tau^{-1}\{I(\tau)\}^{1/p}\left(\int_{[0,\tau)\times B(\sqrt{\tau})}dxdt\right)^{1/q}=C\tau^{(d+2)/2q-1}\{I(\tau)\}^{1/p}. \end{aligned} \tag{7}$$

となる. 次に K_2 を評価する. $l/q-2\geq 0$ とヘルダーの不等式から,

$$\begin{aligned} K_2&\leq l(l-1)\tau^{-1}\int_{[0,\tau)\times B(\sqrt{\tau})}|u|\eta_\tau^l\phi_\tau^{l-2}|(\nabla\phi)(x/\sqrt{\tau})|^2dxdt \\ &\quad+l\tau^{-1}\int_{[0,\tau)\times B(\sqrt{\tau})}|u|\eta_\tau^l\phi_\tau^{l-1}|(\Delta\phi)(x/\sqrt{\tau})|dxdt \\ &\leq C\tau^{-1}\int_{[0,\tau)\times B(\sqrt{\tau})}|u|\psi_\tau^{l/p}dxdt\leq C\tau^{(d+2)/2q-1}\{I(\tau)\}^{1/p}. \end{aligned} \tag{8}$$

を得る. ここで (5) から (8) より,

$$-\lambda\mathrm{Im}J(\tau)\leq C\tau^{(d+2)/2q-1}\{I(\tau)\}^{1/p}-I(\tau). \tag{9}$$

いま $p,q>1$ かつ $1/p+1/q=1$ であることに注意すると, $a,b>0$ に対して $ab\leq a^p/p+b^q/q$ なので, 右辺の第 1 項は

$$C\tau^{(d+2)/2q-1}\{I(\tau)\}^{1/p}\leq C\tau^{(d+2)/2-q}+I(\tau). \tag{10}$$

と評価できる. 従って (9)-(10) より,

$$-\lambda\mathrm{Im}J(\tau)\leq C\tau^{(d+2)/2-q}, \tag{11}$$

を得る. ただし C は d,p,l にのみ依存する正の定数である. $\square$

f が原点で特異性を持つという条件 (2) を課すことによって, 補題 4.1 から次の補題 4.2 が得られる. 補題 4.2 のおかげで, λ が大きい場合を扱うことができるようになった.

補題 4.2. 補題 4.1 と同じ仮定を満たすとする. さらに f が $k<d$ に対して *(2)* を満たすとする. このとき, 任意の $\tau\in(0,T)$ に対して

$$\lambda\leq C\tau^{(k+2)/2-q}\left(\int_{|x|\leq 1/\sqrt{\tau}}|x|^{-k}\phi^l(x)dx\right)^{-1} \tag{12}$$

が成り立つ. ここで $C>0$ は補題 4.1 と同じ定数である.

⟨ 証明 ⟩. 補題 4.1 で得られた不等式に (2) を満たす f を代入すれば良い. □

ここでは定理 3.2 のみ証明する.

⟨ 定理 3.2 の証明 ⟩. 或る $T > 0$ と $[0,T)$ 上の弱解 u が存在したとする. 補題 4.2 より, 任意の $\tau \in (0,T)$ に対して

$$\lambda \le C_1 \tau^{(k+2)/2-q} \{L(\tau)\}^{-1}, \tag{13}$$

が成り立つ. ここで $L(\tau) := \int_{|x|\le 1/\sqrt{\tau}} |x|^{-k} \phi^l(x) dx$ である. $L(\tau)$ は τ に関して $[0,\infty)$ 上単調減少であり, $k < d/2 < d$ なので, 任意の $\tau \in (0,4)$ に対して

$$L(\tau) > L(4) = \int_{|x|<1/2} |x|^{-k} dx =: C_2(<\infty), \tag{14}$$

が成り立つ. いま (13)-(14) より, 任意の $\tau \in (0, \min(4,T))$ に対して

$$0 \le \lambda \le C_1 C_2^{-1} \tau^{(k+2)/2-q}, \tag{15}$$

を得る. 仮定より $2/(p-1) < k$ なので, $k/2 - 1/(p-1) = (k+2)/2 - q > 0$ である. 従って (15) において $\tau \to +0$ とすれば, $\lambda = 0$ を得る. □

定理 3.1 の証明や詳しい情報は, 参考文献 [2] をご覧いただきたい.

謝辞

援助してくださった先生方, 運営をしてくださった第 12 回城崎新人セミナー運営委員の方々, つたや旅館の方々, その他運営に携わった皆様にこの場を借りてお礼申し上げます.

参考文献

[1] T. Cazenave, F. B. Weissler, *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s*, Nonlinear Anal,. **14** (1990), 807-836.

[2] M. Ikeda, T. Inui, *Some non-existence results for the semilinear Schrödinger equation without gauge invariance*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **425**, (2015), no. 2, 758–773.

[3] M. Ikeda, T. Inui, *Small data blow-up of L^2 or H^1-solution for the semilinear Schrödinger equation without gauge invariance*, Journal of Evolution Equations, (2015), DOI 10.1007/s00028-015-0273-7.

[4] Y. Tsutsumi, *L^2-solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups.* Funkcialaj Ekvacioj, **30** (1987), 115-125.