On the descent of modular Calabi-Yau varieties arising from the Cynk-Hulek construction

平川 義之輔 *

慶應義塾大学，2015 年 2 月

概 要

本稿では, 谷山-志村予想の高次元化への 1 つのアプローチとして, ある種の Calabi-Yau 多様体の L 関数と楕円 Hecke 固有新形式の L 関数との関係を主張する Mazur と van Straten の予想を紹介した後, 現在までに知られている結果の紹介, 及び最近筆者により得られた結果（当日の発表内容を拡張したもの）の紹介を行う.

1 Mazur と van Straten の予想

タイトルにある Calabi-Yau 多様体とは, 以下のような代数多様体のことである.

定義 1. 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の滑らかな n 次元射影代数多様体 X が（狭義の）Calabi-Yau 多様体であるとは, 以下の 2 つが成り立つことである.

$$\text{(i) } \Omega^i_X(X) = 0 \ (1 \leq \forall i \leq n-1), \text{ (ii) } \Omega^n_X \simeq \mathcal{O}_X$$

また, 部分体 $F \subset \mathbb{C}$ 上の滑らかな n 次元射影代数多様体 X が Calabi-Yau 多様体であるとは, X の $\mathbb{C}$ への基底変換 $X_{\mathbb{C}}$ が $\mathbb{C}$ 上の Calabi-Yau 多様体となることである.

有理点を持つ 1 次元 Calabi-Yau 多様体は, 楕円曲線に他ならない. 谷山-志村予想とは, 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線に関する以下のような予想（現在は定理）である.

定理 1. $\mathbb{Q}$ 上の任意の楕円曲線 E は保型的である. すなわち, 各 E に対して, ある重さ 2 の楕円 Hecke 固有新形式 f が存在し, $L(E,s) = L(f,s)$ が成り立つ.

谷山-志村予想の高次元 Calabi-Yau 多様体への拡張は極めて自然な問題であるが, この予想をより一般の代数多様体（あるいはモチーフ）にも拡張した Langlands 予想の解決の見通しは立っていない. そこで, 保型的な Calabi-Yau 多様体を具体的に構成し, またそれらを考察することで, ある種の Calabi-Yau 多様体と楕円 Hecke 固有新形式との対応関係を理解することを試みる. これに対して, Mazur と van Straten により, 次のような予想が提示された.

予想 1. Fourier 係数が $\mathbb{Q}$ に属する重さ $n+1$ の任意の楕円 Hecke 固有新形式 f に対して, ある n 次元 Calabi-Yau 多様体 X, 及び部分モチーフ $t^n(X) \subset h^n(X)$ が存在し, $L(t^n(X),s) = L(f,s)$ が成り立つ. すなわち, f の L 関数は X の L 関数の因子として実現される.

*hirakawa@keio.jp

注意 1. 楕円曲線の自然な高次元化には, Calabi-Yau 多様体以外にも Abel 多様体が知られているが, 予想 1 の Abel 多様体類似は一般には成立しないことを注意しておく. 例えば、Fourier 係数が $\mathbb{Q}$ に属する重さ 3 の楕円 Hecke 固有新形式で, その L 関数が $\mathbb{Q}$ 上の 2 次元 Abel 多様体の L 関数の因子としては決して得られないものが存在する. (cf. [ES])

$n \leq 2$ の場合には, 予想 1 を支持する結果が得られている.

定理 2. (i) 予想 1 は $n = 1$ のとき正しい.

(ii) ([ES]) Dirichlet L 関数に対する一般化された Riemann 予想を仮定すると, 予想 1 は $n = 2$ のとき正しい.

(i) は楕円曲線のモジュライ空間であるモジュラー曲線の Jacobi 多様体の考察, (ii) は楕円曲面構造を持つある種の 2 次元 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間である志村曲線の考察が核心である. しかし, 高次元 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間の構成は困難であり, 従って $n \leq 2$ の場合の方法を直接高次元化することも困難である.

2 Cynk と Hulek による帰納的な構成

一方で, $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線のような保型的な代数多様体から代数幾何学的な操作を通じて Calabi-Yau 多様体（とそれらの間の代数的対応）を構成することができれば, もとの代数多様体の保型性を経由して Calabi-Yau 多様体の保型性を証明できる可能性がある. 実際, Cynk と Hulek は, 以下に述べる方法で保型的な高次元 Calabi-Yau 多様体の族を帰納的に構成することに成功した.

まず, 2 つの楕円曲線 E_1, E_2 及びそれぞれの Abel 群構造に関する標準的な対合 ι_1, ι_2 に対して, 商多様体 $E_1 \times E_2/\iota_1 \times \iota_2$ の極小特異点解消として 2 次元 Calabi-Yau 多様体 X_2 を得る. X_2 は自然に $E_1/\iota_1 \times E_2/\iota_2 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2 重被覆と見なせるので, その被覆変換を τ_2 とする. 次に, 楕円曲線 E_3 及び E_3 上の標準的な対合 ι_3 に対して, $X_2 \times E_3/\tau_2 \times \iota_3$ の特異点解消として 3 次元 Calabi-Yau 多様体 X_3 を構成できる. X_3 も X_2 と同様に, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2 重被覆と見なせるので, 以下同様にして n 次元 Calabi-Yau 多様体 X_n を構成できる.

定理 3. ([CH]) $E_1, \ldots, E_n$ を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線, $f_1, \ldots, f_n$ をそれぞれ $L(E_i, s) = L(f_i, s)$ を満たす楕円 Hecke 固有新形式とする. このとき, 上で構成した n 次元 Calabi-Yau 多様体 X_n は $\mathbb{Q}$ 上のモデルを持ち, 以下が成り立つ.

$$L(h^n(X_n/\mathbb{Q}), s) = L(\bigotimes_{i=1}^{n} f_i, s) \ (n : \text{奇数})$$
$$L(t^n(X_n/\mathbb{Q}), s) = L(\bigotimes_{i=1}^{n} f_i, s) \ (n : \text{偶数}, t^n(X_n/\mathbb{Q}) \subset h^n(X_n/\mathbb{Q}) : \text{部分モチーフ})$$

ただし, $L(\bigotimes_{i=1}^{n} f_i, s)$ は f_i に対応する Galois 表現のテンソル表現の L 関数を表す。

系 4. ([CH]) 定理 3 の仮定の下で, さらに $E_1, \ldots, E_n$ はすべて $\mathbb{Q}$ 上同型で, 類数 1 の虚 2 次体 K

上で K に虚数乗法を持つと仮定する. このとき, 以下が成り立つ.

$$L(h^n(X_n/\mathbb{Q}),s) = \prod_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} L(g_{n-2i}, s-i)^{\binom{n}{i}} \ (n: \text{奇数})$$

$$L(t^n(X_n/\mathbb{Q}),s) = \prod_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} L(g_{n-2i}, s-i)^{\binom{n}{i}} \times L(\chi_K, s-\frac{n}{2})^{\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}} \times \zeta(s-\frac{n}{2})^{\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}}$$
$$(n: \text{偶数}, t^n(X_n/\mathbb{Q}) \subset h^n(X_n/\mathbb{Q}) : \text{部分モチーフ})$$

ただし, $L(g_k,s)$, $L(\chi_K,s)$, 及び $\zeta(s)$ は, それぞれ重さ $k+1$ の楕円 Hecke 固有新形式の L 関数, K に付随する Dirichlt L 関数, 及び Riemann ζ 関数を表す.

3 $\mathbb{Q}$-楕円曲線と Weil 係数制限関手

定義 2. 代数体 F 上の楕円曲線 E が $\mathbb{Q}$-楕円曲線であるとは, E と $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 共役な任意の楕円曲線と E 自身とが $\overline{\mathbb{Q}}$ 上同種であることである.

$\mathbb{Q}$ 上の任意の楕円曲線は $\mathbb{Q}$-楕円曲線であるが, 逆は成り立たない. しかし, $\mathbb{Q}$-楕円曲線は $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とよく似た数論的な性質を持つ. 実際, 系 4 と全く同様にして以下の命題を証明することができる.

命題 5. E を虚 2 次体 K に虚数乗法を持つ $K(j_E)$ 上の $\mathbb{Q}$-楕円曲線, $E_1 = E, E_2, \ldots .E_n$ を（重複を許した）E と $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 共役な楕円曲線, ψ, 及び $\overline{\psi}$ をそれぞれ $E/K(j_E)$ から定まる $K(j_E)$ の Hecke 指標, 及びその複素共役とする. このとき, 定理 3 と同様に構成した n 次元 Calabi-Yau 多様体 X_n は $K(j_E)$ 上のモデルを持ち, 以下が成り立つ.

$$L(h^n(X_n/K(j_E)),s) \doteq \prod_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} L(\psi^{n-2i}, s-i)^{\binom{n}{i}} \times \prod_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} L(\overline{\psi}^{n-2i}, s-i)^{\binom{n}{i}} \ (n: \text{奇数})$$

$$L(t^n(X_n/K(j_E)),s) \doteq \prod_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} L(\psi^{n-2i}, s-i)^{\binom{n}{i}} \times \prod_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} L(\overline{\psi}^{n-2i}, s-i)^{\binom{n}{i}} \times \zeta_{K(j_E)}(s-\frac{n}{2})^{\binom{n}{\frac{n}{2}}}$$
$$(n: \text{偶数}, t^n(X_n/K(j_E)) \subset h^n(X_n/K(j_E)) : \text{部分モチーフ})$$

ただし, $L(\psi,s)$, 及び $\zeta_{K(j_E)}(s)$ は, それぞれ ψ に付随する Hecke L 関数, 及び $K(j_E)$ 上の Dedekind ζ 関数を表し, $\doteq$ は有限個の Euler 因子を除いた等号を表す.

そこで, 楕円曲線そのものの定義体は $\mathbb{Q}$ に降下できなくとも, このように構成した Calabi-Yau 多様体 X_n が $\mathbb{Q}$ 上のモデルを持てば, 系 4 では実現できなかった楕円 Hecke 固有新形式も X_n の L 関数の因子として実現できるであろうと期待される. 実際, Cynk と Schütt は以下の定理を証明した.

定理 6. ([CS]) 虚 2 次体 K の類数が 3 のとき, 命題 5 で楕円曲線 $E/\mathbb{Q}(j_E)$ から構成した 3 次元 Calabi-Yau 多様体 X_3 は $\mathbb{Q}$ 上のモデルを持ち, 以下が成り立つ.

$$L(h^3(X_3/\mathbb{Q}),s) = L(g_3,s)L(\psi,s-1)$$

ただし, $L(g_3,s)$, 及び $L(\psi,s)$ は, それぞれ重さ $3+1=4$ の楕円 Hecke 固有新形式の L 関数, 及び $E/\mathbb{Q}(j_E)$ から定まる Hecke 指標 ψ に付随する Hecke L 関数を表し, このような $L(g_3,s)$ は系 2.2 で得られたものたちとは重複しない.

定理 6 の証明の核心は, X_3 の構成に用いる楕円曲線の直積 $E_1 \times E_2 \times E_3$ を, E の Weil 係数制限関手による像 $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}(j_E)/\mathbb{Q}}(E)$ と見なすことで, 多様体の定義体を H あるいは $\mathbb{Q}(j_E)$ から $\mathbb{Q}$ へ降下することである. しかし, 一般には Weil 係数制限関手によって直積型の多様体の定義体を降下できたとしても, 商多様体の特異点解消の定義体を降下できるとは限らないため, Cynk と Schütt による降下法は 4 次元以上の場合には上手く機能しない.

4　主結果

以下では, 2 次元 Calabi-Yau 多様体上の固定点自由な群作用を用いることで, 特異点解消を経由することなくより小さな体上の $2n$ 次元 Calabi-Yau 多様体を構成する方法を述べる.

F/K を $2n$ 次の Galois 拡大, E を F 上の楕円曲線, ι を E 上の標準的な対合とする. さらに, E は F 上定義された位数 2 の点 P を含むと仮定する. まず, K 上 2 次の中間体 $K \subset K' \subset F$ を 1 つ取り, $\mathrm{Gal}(F/K') = \langle \sigma \rangle$ とする. すると, よく知られているように, 商多様体 $\mathrm{Res}_{F/K'}(E)/\iota \times \iota^\sigma$ の極小特異点解消 X_2 は K' 上の 2 次元 Calabi-Yau 多様体を定める. $n = 1$ ならば, X_2 が既に K 上定義されているが, $n \geq 2$ の場合も以下のようにして K 上の $2n$ 次元 Calabi-Yau 多様体 X_{2n} を構成できる. 2 次元 Abel 多様体 $(\mathrm{Res}_{F/K'}(E))_F \simeq E \times E^\sigma$ 上の対合

$$(P_1, P_2) \mapsto (P_1 + P, -P_2 + P^\sigma)$$

が誘導する $(X_2)_F$ 上の不分岐対合 ϵ を考えると, X_2 上の楕円曲面構造から ϵ は K' 上定義されることが分かる. そこで, 異なる n 個の体の埋め込み $\iota_i : K' \hookrightarrow F$ による ϵ の像 ϵ_i に対して $G = \{\epsilon_1^{p_1} \times \cdots \times \epsilon_n^{p_n} \mid \sum_{i=0}^{n} p_i = 0 \bmod 2\}$ と定めると, 自然に $G \subset \mathrm{Aut}_F(\mathrm{Res}_{F'/\mathbb{Q}}(X_2))$ と見なせるが, G は $\mathrm{Gal}(F/K)$ の作用に関して安定であるため, K 上の滑らかな $2n$ 次元射影代数多様体 $X_{2n} = \mathrm{Res}_{F'/\mathbb{Q}}(X_2)/G$ を得る. また, Cynk と Hulek による議論と同様にして X_{2n} が $2n$ 次元 Calabi-Yau 多様体であることも分かる.

以下が本稿の主結果である.

定理 7. E を $\mathbb{Q}(j_E)$ 上の楕円曲線とする. また, E は $\mathbb{Q}(j_E)$ 上に位数 2 の点を持ち, かつ $K(j_E)$ 上で類数 $2m$ ($m \leq n = [\mathbb{Q}(j_E) : \mathbb{Q}]$) の虚 2 次体 K の整数環に虚数乗法を持つと仮定する. このとき, $E_{K(j_E)}$ から, 上で述べた方法で構成された K 上の $2m$ 次元 Calabi-Yau 多様体 X_{2m} は $\mathbb{Q}$ 上のモデルを持ち, さらに以下を満たす.

$$L(t^{2m}(X_{2m}/K(j_E)), s) \doteq \prod_{i=0}^{m-1} L(\psi^{m-2i}, s-i)^{\binom{m}{i}} \times \prod_{i=0}^{m-1} L(\overline{\psi}^{m-2i}, s-i)^{\binom{m}{i}} \times \zeta_{K(j_E)}(s - \frac{m}{2})^{\binom{m}{\frac{m}{2}}}$$

$$(t^m(X_m/K(j_E)) \subset h^m(X_m/K(j_E)) : \text{部分モチーフ})$$

ただし, ψ 及び $\overline{\psi}$ は $E/K(j_E)$ から定まる $K(j_E)$ の Hecke 指標及びその複素共役である.

今後は, §3 と同様に $\mathbb{Q}$-楕円曲線 E から構成した Calabi-Yau 多様体 X_{2m} に対して, 部分モチーフ $t^{2m}(X_{2m}/K(j_E))$ を $\mathbb{Q}$ 上のモチーフに降下し, 除いてしまった有限個の Euler 因子も含めてその L 関数 $L(t^{2m}(X_{2m}/\mathbb{Q}), s)$ を楕円 Hecke 固有新形式の L 関数で記述することで, 定理 6 を高次元化することが課題である.

謝辞

今回、素晴らしい環境の中での貴重な発表の機会を下さった第 12 回城崎新人セミナー運営委員の皆様に、深く感謝申し上げます。また、貴重なコメントを下さった聴講者の皆様、特に、当日発表した主結果の拡張に関して的確なコメント下さった谷田川友里氏と武田裕康氏に、深く感謝申し上げます。

参考文献

[CH] S. Cynk and K. Hulek, *Higher-dimensional modular Calabi-Yau manifolds*, Canad. Math. Bull., **50** (4), 2007, 486–503.

[CS] S. Cynk and M. Schütt, Generalized Kummer constractions and Weil restrictions, Journal of Number Theory, **129**, 2009, 1965–1975.

[ES] N. D. Elkies and M. Schütt, Modular forms and K3 surfaces, Advances in Mathematics, **240**, 2013, 106-131.