Euler-α 方程式における点渦力学とエンストロフィー変動

後藤田 剛 *

京都大学理学研究科， 2015 年 2 月

1 研究の背景

Navier-Stokes 方程式の粘性ゼロ極限と一様等方乱流には深い関係があり, 特に二次元において乱流状態を維持するには, その粘性極限において流体のエンストロフィーと呼ばれる量が散逸することが重要であるとされている [4, 8]. よって, 非粘性流体の運動を記述する Euler 方程式について, 正則な解はエネルギーを保存するので, 正則でない解が乱流に関係していると思われる. ただし, Euler 方程式の解については, 初期渦度が Radon 測度の空間に入っていない限り, このような散逸が起こり得ないことが数学的に示されている [2, 3]. しかし, そのような初期値に対しては Euler 方程式が可解性を持たないため, Euler 方程式の散逸的弱解を直接構成するには数学解析的に困難が伴う. そこで, Euler 方程式においてスケール α 以下の情報を平均化して繰り込むことで得られる, Euler-α 方程式について考える. これは Euler 方程式の正則化方程式であり, 乱流現象との関係も深い. 例えば, 粘性項を加えた Navier-Stokes-α 方程式の数値計算による研究では, α が小さいときにはその解が乱流と同様の性質を持つことが示されている [1]. 加えて, 二次元では初期渦度を Radon 測度とした場合でも時間大域的な弱解の一意存在がわかっている [7]. よって, Euler-α 方程式の解の α ゼロ極限として Euler 方程式の散逸的弱解を構成できる可能性がある.

このような背景の下, α ゼロ極限でエンストロフィーを散逸するような Euler-α 方程式の解の構成について研究をしている. 具体的には, 二次元 Euler 方程式について, 点渦初期値, つまりデルタ関数を初期値として形式的に導かれる点渦系と, 同様の初期値に対して Euler-α 方程式から導かれる α 点渦系を研究しており, α 点渦系の力学とその α ゼロ極限における解のエンストロフィーの散逸の有無と, 対応する点渦系の挙動との関係に特に興味を持っている. 三個の点渦系については可積分系であることから多くの結果が知られており (例えば [5] を参照), α ゼロ極限でエンストロフィーが散逸すよるような解が具体的に構成されている [9], これは点渦系における自己相似衝突解に対応しており, エンストロフィー散逸と渦の衝突には深い関係があることわかる.

2 Euler-α 方程式

二次元 Euler-α 方程式は次で与えられる.

$$\begin{cases} (1-\alpha^2\Delta)\partial_t u + u\cdot\nabla(1-\alpha^2\Delta)u - \alpha^2(\nabla u)^T\cdot\Delta u = -\nabla p, \\ \nabla\cdot u = 0, \quad u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

*gotoda@math.kyoto-u.ac.jp

渦の時間発展を調べるために, 渦度に対する方程式を導く. 渦度を $q = (1 - \alpha^2\Delta)\nabla^\perp \cdot u$ として与えると次の α 渦度方程式を得る.

$$\begin{cases} \partial_t q + (u \cdot \nabla) q = 0, \\ \qquad u = K^\alpha * q. \end{cases} \tag{2.1}$$

初期条件は $q(x,0) = (1 - \alpha^2\Delta)\nabla^\perp \cdot u_0$ で与えられる. ここで, $K^\alpha(x)$ は

$$K^\alpha = \nabla^\perp G^\alpha, \quad -\Delta G^\alpha(x) = \frac{1}{2\pi\alpha^2} K_0\left(\frac{|x|}{\alpha}\right)$$

で定義され, $K_0(x)$ は第二種変形 Bessel 関数を表している. また, Lagrangian flow map を次で定義する.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\eta^\alpha(x,t) = u(\eta^\alpha(x,t),t), \\ \qquad \eta^\alpha(x,0) = x. \end{cases} \tag{2.2}$$

α 渦度方程式において初期渦度を Radon 測度, $\mathscr{M}(\mathbb{R}^2)$ で与えた場合の初期値問題については Oliver と Shkoller によって弱解の時間大域的な一意存在が示されており, さらに, 有界で可積分な初期値に対しては Euler-α 方程式の解は Euler 方程式の解に収束することが知られている [7].

定理 2.1. (Oliver and Shkoller [7])
$q(x,0) \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^2)$ に対して, (2.1), (2.2) の弱解が時間大域的に一意存在して,

$$\eta^\alpha \in C^1(\mathbb{R};\mathscr{G}), \quad u \in C(\mathbb{R};C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)), \quad q \in C(\mathbb{R};\mathscr{M}(\mathbb{R}^2)),$$

が成立する. ただし, $\mathscr{G}$ は $\mathbb{R}^2$ 上の Lebesgue 測度を保存する同相写像全体の集合を表す.

3 α 点渦系とエンストロフィー変動

次に, 点渦初期値について考える. つまり, δ を Dirac のデルタ関数とし, 初期時刻における N 個の点渦の配置を $\{x_n^0\}_{n=1}^N \subset \mathbb{R}^2$, 各点渦の強さを Γ_n で与えたとき, 次のような初期値を考える.

$$q(x,0) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \delta(x - x_n^0). \tag{3.1}$$

このとき, 次の命題が成立する.

命題 3.1. (3.1) を初期値とする (2.1) の弱解は

$$q(x,t) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \delta(x - \eta^\alpha(x_n^0,t)). \tag{3.2}$$

となる. さらに, α 点渦系では点渦の衝突は起こらない.

証明. 定理 2.1 より, Euler-α 方程式における Lagrangian flow map の時間大域的な一意存在がわかっているので,

$$q(x,t) = q(\eta^\alpha(x,-t),0) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \delta(\eta^\alpha(x,-t) - x_n^0)$$

となる．もし, $\eta^\alpha(x,-t)=x_n^0$ ならば $x=\eta^\alpha(x_n^0,t)$ が成立し, そうでなければ $x\neq\eta^\alpha(x_n^0,t)$ が成り立つ．これは

$$\delta(\eta^\alpha(x,-t)-x_n^0)=\delta(x-\eta^\alpha(x_n^0,t))$$

を意味している．さらに, flow map の一意性から, $n\neq m$ なら $\eta^\alpha(x_n^0,t)\neq\eta^\alpha(x_m^0,t)$ が任意の $t>0$ に対して成立する．つまり, 衝突は起こらない． □

命題 3.1 より, Euler-α 方程式においては点渦 (デルタ関数) は点渦のまま時間発展することがわかる．この場合, Euler-α 方程式 (2.1) に (3.2) を代入し, $\eta^\alpha(x_n^0,t)=x_n^\alpha(t)$ とおくことで, α 点渦系と呼ばれる次の常微分方程式系に帰着される．

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_n^\alpha(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{m\neq n}^{N}\Gamma_m\frac{(x_n^\alpha(t)-x_m^\alpha(t))^\perp}{l_{nm}^\alpha(t)^2}B_K\left(\frac{l_{nm}^\alpha(t)}{\alpha}\right), \\ x_n^\alpha(0)=x_n^0. \end{cases} \tag{3.3}$$

ここで, $l_{nm}^\alpha=|x_n-x_m|$, $B_K(x)=1-xK_1(x)$ であり, $K_1(x)$ も第二種変形 Bessel 関数の一つである．Bessel 関数の性質から, $B_K(x)\to1$, $x\to\infty$ と $B_K(x)\to0$, $x\to0$ が従う．よって, α 点渦系において二つの点渦の距離がゼロになったとき, 速度場がゼロに収束することから, 方程式の右辺はゼロとなる．一方で, Euler 方程式から導かれる点渦系,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_n(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{m\neq n}^{N}\Gamma_m\frac{(x_n(t)-x_m(t))^\perp}{l_{nm}(t)^2}, \\ x_n(0)=x_n^0 \end{cases} \tag{3.4}$$

については, 二つの点渦の距離 $l_{nm}=|x_n-x_m|$ がゼロに近づくと速度場が発散することがわかる．これより, 点渦系においては点渦の衝突が起こりうる (常微分方程式系における解の爆発)．命題 3.1 から α 点渦系では衝突は起こりえず, $B_K(x)$ のおかげで正則化されていることがわかる．

注意 3.2. α 点渦系 (3.3) については Euler-α 方程式 (2.1) に (3.2) を代入することで数学的に厳密に導かれるのに対して, 点渦系 (3.4) は Euler 方程式から形式的な議論によって導かれることに注意する．この違いは速度場を定義する際の積分核の特異性の有無に起因する．α 点渦系 (3.3) において形式的に $\alpha=0$ とすると点渦系 (3.4) に一致する．

次に α 点渦系のエネルギー変動とエンストロフィー変動を定義する．Novikov による, 点渦系のエネルギーの導出方法 [6] と同様の方法で計算すると, エネルギー変動とエンストロフィー変動はそれぞれ次のようになる．

$$E^\alpha(t)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=n+1}^{N}\Gamma_n\Gamma_m\left[\log l_{mn}^\alpha+K_0\left(\frac{l_{mn}^\alpha}{\alpha}\right)+\frac{l_{mn}^\alpha}{2\alpha}K_1\left(\frac{l_{mn}^\alpha}{\alpha}\right)\right],$$

$$\mathscr{Z}^\alpha(t)=\frac{1}{4\pi\alpha^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=n+1}^{N}\Gamma_n\Gamma_m\frac{l_{nm}^\alpha}{\alpha}K_1\left(\frac{l_{nm}^\alpha}{\alpha}\right).$$

定理 3.3. 区間 $t\in I$ 対して, あるゼロでない定数 $C_{mn}(t)\neq0$ が存在して,

$$\lim_{\alpha\to0}\sup_{t\in I}|l_{mn}^\alpha(t)-C_{mn}(t)|=0,\quad m\neq n=1,...,N, \tag{3.5}$$

が成立していると仮定する．このとき，エネルギー変動は点渦系のハミルトニアンエネルギー $H(t)$ に収束し，エンストロフィー変動はゼロに収束する．すなわち，

$$\lim_{\alpha\to 0}\sup_{t\in I}|E^\alpha(t)-H(t)|=0,\quad \lim_{\alpha\to 0}\sup_{t\in I}|\mathscr{Z}^\alpha(t)|=0.$$

証明. α 点渦系，点渦系ともにハミルトン系であり，そのハミルトニアンはそれぞれ，

$$\begin{aligned}
H^\alpha(t)&=-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=n+1}^{N}\Gamma_n\Gamma_m\log l_{nm}^\alpha(t)-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=n+1}^{N}\Gamma_n\Gamma_m K_0\left(\frac{l_{nm}^\alpha(t)}{\alpha}\right),\\
H(t)&=-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=n+1}^{N}\Gamma_n\Gamma_m\log l_{nm}(t)
\end{aligned}$$

であることに注意する．まず，エネルギー変動の収束を証明する．

$$|E^\alpha-H|\le|H^\alpha-H|+\frac{1}{2\pi}\sum\sum|\Gamma_n\Gamma_m|\frac{l_{mn}^\alpha}{2\alpha}K_1\left(\frac{l_{mn}^\alpha}{\alpha}\right). \tag{3.6}$$

ハミルトニアン $H^\alpha(t)$ は時間不変量であることから

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi}\sum\sum\Gamma_n\Gamma_m\log l_{nm}^\alpha(t)-\frac{1}{2\pi}\sum\sum\Gamma_n\Gamma_m K_0\left(\frac{l_{nm}^\alpha(t)}{\alpha}\right)\\
&=-\frac{1}{2\pi}\sum\sum\Gamma_n\Gamma_m\log|x_n^0-x_m^0|-\frac{1}{2\pi}\sum\sum\Gamma_n\Gamma_m K_0\left(\frac{|x_n^0-x_m^0|}{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

が成り立つ．従って，$\alpha\to 0$ とすると

$$-\frac{1}{2\pi}\sum\sum\Gamma_n\Gamma_m\log C_{mn}(t)=-\frac{1}{2\pi}\sum\sum\Gamma_n\Gamma_m\log|x_n^0-x_m^0| \tag{3.7}$$

を得る．一方，$H(t)$ もまた時間不変量であることから

$$-\frac{1}{2\pi}\sum\sum\Gamma_n\Gamma_m\log l_{nm}(t)=-\frac{1}{2\pi}\sum\sum\Gamma_n\Gamma_m\log|x_n^0-x_m^0|$$

であり，結果として次の等式を得る．

$$-\frac{1}{2\pi}\sum\sum\Gamma_n\Gamma_m\log C_{mn}(t)=-\frac{1}{2\pi}\sum\sum\Gamma_n\Gamma_m\log l_{nm}(t).$$

よって，(3.6) の右辺第一項は α ゼロ極限でゼロに収束する．第二項については，$K_1(x)\sim e^{-x}$ as $x\to\infty$ であることからゼロに収束することがわかる．エンストロフィー変動の収束については，仮定 (3.5) より

$$\frac{l_{mn}^\alpha}{\alpha}\to\infty\quad\text{as}\quad\alpha\to 0.$$

となるので，K_1 の性質から結果を得る． □

系 3.4. ある時刻 t_c において，$\alpha\to 0$ でエンストロフィー $\mathscr{Z}^\alpha(t_c)$ が変動するならば，$l_{mn}^\alpha(t)\longrightarrow 0$ as $\alpha\to 0$ が成り立つ．

エンストロフィーの変動が起こるのはどのような場合かを考える上で，$C_{mn}(t)$ が満たす性質を考察することは重要である．証明中の (3.7) は点渦系におけるハミルトニアンの保存則と同様の等式であることから，$C_{mn}(t)$ は $l_{mn}(t)$ に対応していると考えられる．ただし，この二つが任意の $m\neq n=1,...,N$ で等しいことまでは示せていないことに注意する．系 3.4 と合わせて，エンストロフィー散逸と点渦系における渦の衝突には深い関係があると推測できる．この点については現在研究中である．

4　まとめと今後の課題

本研究は乱流現象の数学的な解析を最終的な目標としている．そこで, 高レイノルズ数状態における流体のエンストフィーの散逸が重要であることから, Euler-α 方程式の解で, α ゼロ極限でエンストロフィーが散逸しているようなものが乱流現象を記述しているのではないかという前提のもとで研究を行っている．注意すべき点は, 必ずしも Euler 方程式の散逸的弱解が乱流を記述しているとは限らず, 本研究においても α ゼロ極限において Euler 方程式の解への収束を目標としているわけではなく, エンストロフィー散逸の有無に最大の関心を持っている (Euler 方程式の弱解への収束も数学的には重要な問題であり, 研究は進めていく予定である).

現在は α 点渦系について α ゼロ極限とエンストロフィー散逸の関係を研究している．結果としては, 仮定 (3.5) の下では極限においてエンストロフィーが散逸しないことが証明された．今後の課題としてはエンストロフィーの散逸と点渦系の衝突解との関係性を明らかにすることである．三個の点渦の場合にはエンストロフィーを散逸する解が具体例が構成されていることから, まずは三個の点渦力学を含む可積分系について数学的に明確にしていきたいと考えている．また一般の N 点渦系についても数値計算などを利用することで研究をしていきたい.

参考文献

[1] Chen, C., Holm, D. D., Margolin, L. G., Zhang, R. : Direct numerical simulations of the Navier-Stokes alpha model. Phys. D **133** (1999), 66–83.

[2] Duchon, J., Robert, R. : Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier-Stokes equations. Nonlinearity **13** (2000), 249–255.

[3] Eyink, G. L. : Local 4/5-law and energy dissipation anomaly in turbulence. Nonlinearity **21** (2003), 1233–1252.

[4] Kolmogorov, A. N. : The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. Dokl. Akad. Nauk. SSSR **30** (1941), 299–303.

[5] Newton, P. K. : The N-Vortex Problem. Analytical Techniques, Springer, 2001.

[6] Novikov, E. A. : Dynamics and statistics of a system of vortices. Sov. Phys.-JETP **41** (1976), 937–943.

[7] Oliver, M., Shkoller, S. : The vortex blob method as a second-grade non-Newtonian fluid. Comm. Partial Differential Equations. **26**(2001), no. 1-2, 295–314.

[8] Onsager, L. : Statistical hydrodynamics. Nuovo Cimento Suppl. **6** (1949), 279–289.

[9] Sakajo, T. : Instantaneous energy and enstrophy variations in Euler-alpha point vortices via triple collapse. J. Fluid Mech. **702** (2012), 188–214.