代数学演義 I (平成 18 年度前期) No.9 (6/20 出題分)

$\boxed{1}$ 2 面体群 D_n の既約表現を同型を除いて決定せよ.

$\boxed{2}$ 四元数群 $Q = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = 1, \sigma^2 = \tau^2, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1} \rangle$ の既約指標をすべて求めよ.

$\boxed{3}$ 対称群 S_n の既約指標は整数値であることを示せ.

$\boxed{4}$ G を群, H を G の指数 2 の部分群とする. $\sigma \in G$, $\sigma \notin H$ とする. H の表現 π に対して $\pi^\sigma(h) = \pi(\sigma h \sigma^{-1})$ によって π^σ を定義する. このとき, 誘導表現 $\mathrm{Ind}_H^G \pi$ が既約であるための必要十分条件は $\pi \not\simeq \pi^\sigma$ であることを示せ.

$\boxed{5}$ G を有限アーベル群とする. $x \in \mathbb{Z}[G]$ が $x^n = 1$ $(\exists n \geq 1)$ となるなら, x は $\pm G$ に含まれることを示せ.

$\boxed{6}$ $\mathbb{C}[X, Y] \ni f(X, Y), g(X, Y)$ の次数をそれぞれ d, e とする. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X, Y]/(f, g) < \infty$ のとき $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X, Y]/(f, g) \leq de$ となることを示せ.

$\boxed{7}$ B を整域とする. A は B の正規局所部分環で, 極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とする. A と B の商体は一致すると仮定する. 集合 $\{P \in \mathrm{Spec}B | P \cap A = \mathfrak{m}\}$ がただひとつの元からなるとする. このとき, $A = B$ を示せ.

$\boxed{8}$ A を Noether 環とし, $A \to B$ は有限型かつ平坦とする. このとき, $\mathrm{Spec}B \to \mathrm{Spec}A$ は開射であることを示せ.

$\boxed{9}$ p を $p \equiv 1 \bmod 3$ なる素数とする.

$$a = p + 1 - \sharp\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_p) \mid x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0\}$$

とおく. このとき, $a^2 + 3b^2 = 4p$ を満たす $b \in \mathbb{Z}$ が存在することを示せ.

$\boxed{10}$ p を $p \equiv 1 \bmod 4$ なる素数とする.

$$a = p + 1 - \sharp\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_p) \mid x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 = 0\}$$

とおく. このとき, a は 6 の倍数で $\left(\frac{a}{6}\right)^2 + b^2 = p$ を満たす $b \in \mathbb{Z}$ が存在することを示せ.

★ k を体とするとき, k 上の射影空間 $\mathbb{P}^n(k)$ は $k^{n+1} - \{0\}$ に同値関係を

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) \sim (y_0, y_1, \ldots, y_n) \iff {}^{\exists}a \in k^\times, (x_0, x_1, \ldots, x_n) = (ay_0, ay_1, \ldots, ay_n)$$

によって定義したときの商空間として定義される. $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in k^{n+1} - \{0\}$ を含む同値類を $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$ で表わす.