代数学演義I (平成18年度前期) No.8 (6/06 出題分)

$\boxed{1}$ G を有限群, n を自然数とし, $|G|$ を割り切る任意の素数 p に対し $p > n$ と仮定する. G が $\mathbb{C}$ 上の n 次忠実表現を持つなら, G はアーベル群であることを示せ.

$\boxed{2}$ G を p 群, k を標数 p の体, V を有限次元 k ベクトル空間, $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ を線型表現とする. この時, $\rho(g)v = v$ $(\forall g \in G)$ となるような 0 でないベクトル $v \in V$ が存在することを示せ.

$\boxed{3}$ G を有限群とする. X_p $(p \geq 0)$ を基底 $\{[\sigma_1, \ldots, \sigma_p] | \sigma_i \in G\}$ から生成される自由 $\mathbb{Z}[G]$ 加群とする. $\mathbb{Z}[G]$ 加群の準同型 $d_p : X_p \to X_{p-1}$ と $\epsilon : X_0 \to \mathbb{Z}$ を

$$\begin{aligned} d_p([\sigma_1, \ldots, \sigma_p]) &= \sigma_1[\sigma_2, \ldots, \sigma_p] - [\sigma_1\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_p] + [\sigma_1, \sigma_2\sigma_3, \sigma_4, \ldots, \sigma_p] \\ &\quad + \cdots + (-1)^k[\sigma_1, \ldots, \sigma_k\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_p] + \cdots + \\ &\quad + (-1)^{p-1}[\sigma_1, \ldots, \sigma_{p-2}, \sigma_{p-1}\sigma_p] + (-1)^p[\sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}] \\ \epsilon([\cdot]) &= 1 \end{aligned}$$

で定義する. ただし, G は $\mathbb{Z}$ に自明に作用するとして $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}[G]$ 加群とみなすものとする. このとき,

$$\to X_p \xrightarrow{d_p} X_{p-1} \to \cdots \to X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

は完全系列になることを示せ.

$\boxed{4}$ $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, M を G 加群とする. このとき, $n \cdot \mathrm{H}^i(G, M) = 0$ $(\forall i > 0)$ を示せ.

$\boxed{5}$ R を Noether 環, M を有限生成 R 加群とする. $i \geq 0$ を固定する. 完全列 $R^b \xrightarrow{f} R^a \to M \to 0$ $(a \geq i)$ をとり, f を表す行列の $(a-i)$ 次小行列式たちで生成される R のイデアルを I とする. I は完全列 $R^b \xrightarrow{f} R^a \to M \to 0$ $(a \geq i)$ の取り方によらずに M のみによって定まることを示せ.

$\boxed{6}$ R を可換環, M を R 加群とする. このとき, injective な R 加群 I への単射 $i : M \to I$ で, 次の条件 $(*)$ を満たすものが存在することを示せ.

$(*)$ I の任意の部分 R 加群 $N \neq (0)$ に対し $N \cap i(M) \neq \{0\}$.

$\boxed{7}$ R を Noether 環, A_1, A_2 を有限生成 R 代数とする. P_i を A_i の素イデアルとし, R 代数同型 $(A_1)_{P_1} \simeq (A_2)_{P_2}$ があるとする. このとき, $f_i \in A_i \setminus P_i$ が存在して, R 代数として $(A_1)_{f_1} \simeq (A_2)_{f_2}$ となるか?

$\boxed{8}$ n を自然数, $\zeta = e^{2\pi i/n}$ を 1 の原始 n 乗根とする. このとき, $\mathbb{Z}[\zeta]$ は整閉であることを示せ.

$\boxed{9}$ 整域 R は $\mathbb{Z}$ 上整であって, $R \supsetneq \mathbb{Z}$ であるとする. このとき, $R \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ がベキ零元をもつような素数 p が存在することを示せ.

$\boxed{10}$ n を自然数とする. n を 4 個の整数の平方の和で表わす方法の数を

$$r_4(n) = \sharp\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{Z}^4 \mid a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = n\}$$

とするとき, $r_4(n) = 8\sigma_1(n) - 32\sigma_1(n/4)$ であることを示せ. ここで $\sigma_1(N)$ は N が整数のときは N の正の約数の和を表わし, N が整数でないときは 0 を表わすものとする.

$\boxed{11}$ n を自然数とする. n を 8 個の整数の平方の和で表わす方法の数を $r_8(n)$ とするとき,

$$r_8(n) = 16 \sum_{d|n} (-1)^{n-d} d^3$$

であることを示せ. ここで $d|n$ は d が n の正の約数であることを意味する. .

$\boxed{12}$ R を Noether 局所環とするとき, R の完備化 $\hat{R}$ は R 上平坦であることを示せ.

$\boxed{13}$ 0 以外の零因子をもたない Noether 局所環 R で, 完備化 $\hat{R}$ が 0 以外の零因子をもつようなものはあるか？

$\boxed{14}$ 0 以外のベキ零元をもたない Noether 局所環 R で, 完備化 $\hat{R}$ が 0 以外のベキ零元をもつようなものはあるか？

$\boxed{15}$ $\mathcal{C}$ を Abel 圏とする. $\mathcal{C}$ における可換図式

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & X_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & X_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & X_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & X_5 \arrow[d, "f_5"] \\
Y_1 \arrow[r, "\beta_1"] & Y_2 \arrow[r, "\beta_1"] & Y_3 \arrow[r, "\beta_1"] & Y_4 \arrow[r, "\beta_1"] & Y_5
\end{tikzcd}$$

において各行は完全であるとする. f_1 が全射, f_5 が単射で f_2 と f_4 が同型ならば, f_3 は同型であることを示せ.